1

Εισαγωγή στη *Mathematica*

Η *Mathematica* είναι ένα αλγεβρικό υπολογιστικό σύστημα το οποίο εκτελεί αριθμητικούς, συμβολικούς και γραφικούς υπολογισμούς. Η ειδοποιός διαφορά της από τις κοινές γλώσσες προγραμματισμού και τα συναφή προγράμματα έγκειται στο ότι εκτελεί όχι μόνο αριθμητικούς αλλά και πολύπλοκους αλγεβρικούς υπολογισμούς. Πρόκειται για μια διαφορά ισοδύναμη με τη διαφορά ανάμεσα στην Αριθμητική και την Άλγεβρα. Η διαφορά αυτή δεν είναι μόνον πρακτική, ότι δηλαδή η *Mathematica* κάνει πέρα από αριθμητικούς υπολογισμούς και συμβολικούς υπολογισμούς. Είναι και μια διαφορά διανοητικού περιβάλλοντος γιατί η *Mathematica* είναι ένα πρόγραμμα υψηλής περιεκτικότητας σε αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και γι' αυτό κομψότερο στην εσωτερική δομή και τον τρόπο λειτουργίας του απ' ότι τα κοινά προγράμματα καθαρά αριθμητικών υπολογισμών. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν οι άνθρωποι της Wolfram Research, Inc. που την ανέπτυξαν, η *Mathematica* είναι ''ένα σύστημα για να κάνει κανείς μαθηματικά με τον υπολογιστή''. Δεν είναι όμως σαν πρόγραμμα αριθμητικών και συμβολικών υπολογισμών ένας απλός εκτελεστής προαποφασισμένων καθηκόντων – έστω μιας πελώριας ποικιλίας τέτοιων καθηκόντων – αλλά μια πλήρης γλώσσα προγραμματισμού. Έτσι οι δυνατότητες που παρέχει στο χρήστη είναι πραγματικά ανεξάντλητες. Η *Mathematica* είναι διαφορετική από άλλες γλώσσες προγραμματισμού (FORTRAN, BASIC, Pascal, C, …). Είναι μια interpreted γλώσσα, δηλ. κάθε εντολή στην είσοδο παράγει άμεσα έξοδο. Όμως, αν και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια γλώσσα προγραμματισμού, η υψηλού επιπέδου δομή της είναι πιο κατάλληλη για εκτέλεση εξεζητημένων – πολύπλοκων πράξεων μέσω της χρήσης 'ενσωματωμένων' (built-in) συναρτήσεων. Και ο αριθμός των built-in συναρτήσεων στη *Mathematica* είναι πελώριος.

Η *Mathematica* αποτελείται από δύο μέρη:

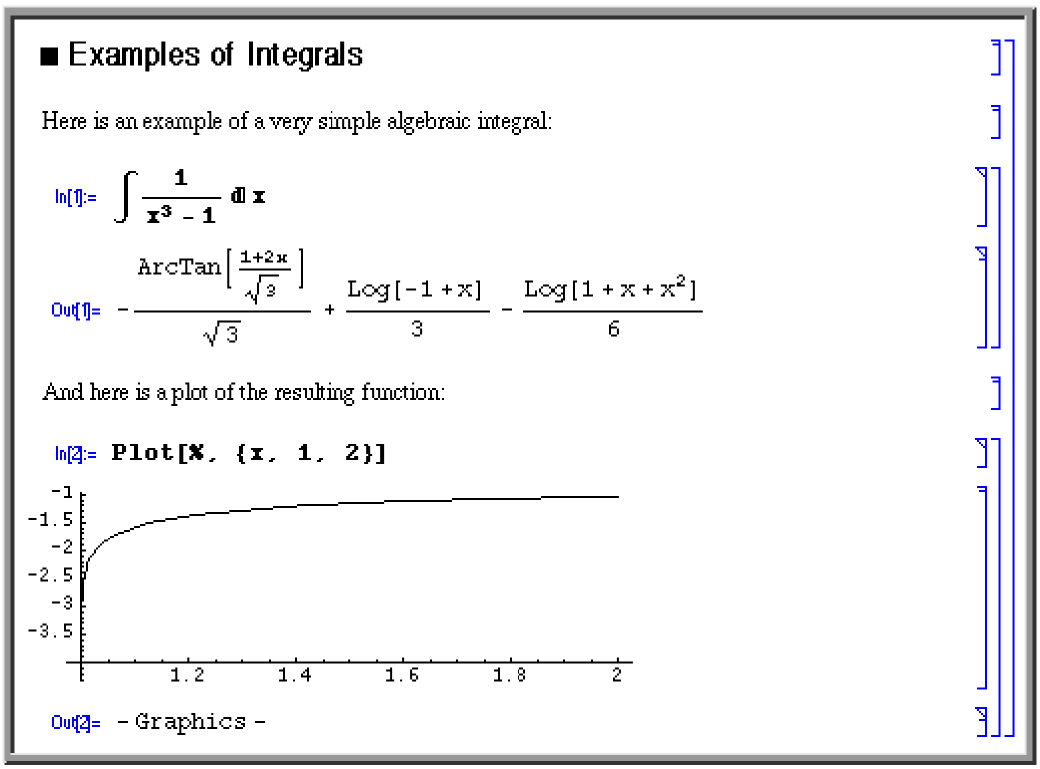
Mathematica kernel	the part that actually performs computations
Mathematica front end	the part that handles interaction with the user

Το *front end* της *Mathematica* δέχεται εισερχόμενα, εμφανίζει εξερχόμενα και γενικά οργανώνει την πληροφορία σε μια 'συνεδρία' (session) της *Mathematica*. Ο πυρήνας (*kernel*) είναι το τμήμα του προγράμματος που κάνει τους υπολογισμούς. Η *Mathematica* είναι ένα modular λογισμικό σύστημα στο οποίο ο *πυρήνας* που στην πραγματικότητα εκτελεί τους υπολογισμούς είναι ξέχωρα από το *front end* που χειρίζεται την αλληλεπίδραση με το χρήστη. Ο πλέον συνήθης τύπος του front end για τη *Mathematica* βασίζεται σε αλληλεπιδραστικά ‘έγγραφα’ (documents) γνωστών ως *notebooks*. Τα notebooks αναμιγνύουν στην είσοδο και έξοδο της *Mathematica* ‘κείμενο’ (text), ‘γραφικά’ (graphics), ‘παλέτες’ (palettes) και άλλο υλικό. Μπορεί κανείς να χρησιμοποιεί notebooks είτε για να κάνει τρέχοντες υπολογισμούς, ή ως μέσα για την παρουσίαση ή έκδοση των αποτελεσμάτων του.

Notebook interface	interactive documents
Text-based interface	text from the keyboard
MathLink interface	communication with other programs

Το front end ενός notebook περιλαμβάνει πολλά ‘μενού’ (menus) και εργαλεία γραφικών για τη δημιουργία και ανάγνωση ‘notebook εγγράφων’ (notebook documents) και για την αποστολή και λήξη υλικού από τον ‘πυρήνα’ της *Mathematica*.

Παράδειγμα:
A notebook mixing text, graphics and *Mathematica* input and output.



Είναι δυνατό να τρέξει κανείς το front end και τον ‘πυρήνα’ σε διαφορετικούς υπολογιστές, αν και μέχρι τώρα ο περισσότερος κόσμος τα τρέχει στην ίδια μηχανή. Υπάρχουν τρεις βασικοί τύποι front ends: Microsoft Windows, Macintosh και UNIX. Αυτά τα front ends χρησιμοποιούν τα notebooks της *Mathematica* ως τη ‘διασύνδεση’ (interface) μεταξύ του χρήστη και του πυρήνα. Τα notebooks της *Mathematica* είναι ανάλογα με τα ηλεκτρονικά φύλλα εργασίας (worksheets) που επιτρέπουν την ολοκλήρωση των εντολών στην είσοδο, την έξοδο του 'πυρήνα' και κειμένου στη *Mathematica*. Αν εξαιρέσουμε μερικές διαφορές ήσσονος σημασίας, τα notebooks της *Mathematica* για κάθε τύπο front end εμφανίζονται παρόμοια. Σ' αυτό το κείμενο θα αναφερόμαστε στον τύπο του front end για Windows.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί κανείς να αλληλεπιδράσει πιο άμεσα με τον πυρήνα της *Mathematica* (παραλείποντας τις λεπτομέρειες του notebook front end): χρησιμοποιώντας μια 'βασισμένη σε κείμενο διασύνδεση' (text-based interface) στην οποία το κείμενο που πληκτρολογεί πηγαίνει απευθείας στον πυρήνα.

Παράδειγμα:
A dialog with *Mathematica* using a text-based interface.

```
In[1]:= 2^100

Out[1]= 1267650600228229401496703205376

In[2]:= Integrate[1/(x^3 - 1), x]

                 1 + 2 x
          ArcTan[-------]                               2
                 Sqrt[3]     Log[-1 + x]   Log[1 + x + x ]
Out[2]= -(---------------) + ----------- - ---------------
              Sqrt[3]             3               6
```

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της *Mathematica* είναι το ότι μπορεί να αλληλεπιδρά και με άλλα προγράμματα. Αυτό επιτυγχάνεται πρωτίστως μέσω του *MathLink*(*): ένα 'πρωτόκολλο' (protocol) για μια two-way επικοινωνία μεταξύ εξωτερικών προγραμμάτων και του 'πυρήνα της *Mathematica*.

Παράδειγμα:
A fragment of C code that communicates via *MathLink* with the *Mathematica* kernel.

```
MLPutFunction(stdlink,  "EvaluatePacket", 1);

  MLPutFunction(stdlink, "Gamma", 2);
  MLPutReal(stdlink, 2);
  MLPutInteger(stdlink, n);

MLEndPacket(stdlink);
MLCheckFunction(stdlink, "ReturnPacket", &n);

MLGetReal(stdlink, &result);
```

(*) Μέσω του *MathLink* επικοινωνεί και ο πυρήνας με το front end.

Μεταξύ των πολλών *MathLink*-συμβατών προγραμμάτων που είναι διαθέσιμα, μερικά είναι εγκατεστημένα για να εξυπηρετήσουν ως πλήρη front ends στη *Mathematica*. Συχνά τέτοια front ends παρέχουν τις δικές τους ειδικές ‘διασυνδέσεις χρήστη’ (user interfaces) και μεταχειρίζονται τον πυρήνα της *Mathematica* καθαρά ως μια ‘ένθετη’ (embedded) υπολογιστική μηχανή.

1.1 Κάνοντας Αριθμητική με τη *Mathematica*

Στο πλέον πρωταρχικό επίπεδο, η *Mathematica* μπορεί να ειδωθεί ως ένας ‘απλός υπολογιστής’ (calculator). Μπορεί να εκτελέσει τις πέντε βασικές πράξεις τις αριθμητικής: πρόσθεση (+), αφαίρεση (–), πολλαπλασιασμό (*, ή κενό διάστημα), διαίρεση (/) και ύψωση σε δύναμη (^). Παρακάτω θα δούμε πως εκτελούμε αυτές τις πράξεις. Αντίθετα όμως από έναν απλό υπολογιστή, η *Mathematica* κάνει αριθμητική ρητών αριθμών και μια ιστορία των πράξεων που εκτελούνται από τον πυρήνα.

1.1.1 Οι **In** και **Out** ‘ετικέτες’ (tags)

Ξεκινώντας το πρόγραμμα εμφανίζεται επί της οθόνης το σήμα της *Mathematica* και αμέσως μετά μια λωρίδα (στο πάνω μέρος της οθόνης) με το γενικό μενού του προγράμματος, μια παλέτα για εύκολη εισαγωγή συμβόλων και το *φύλλο εργασίας* ενός *αρχείου* υπό τον τίτλο `Untitled-1` που αργότερα θα μας ζητηθεί να του δώσουμε ένα όνομα (εφόσον το θέλουμε).

Η *Mathematica* ιχνηλατεί κάθε εισαγόμενη έκφραση που στέλνεται στον ‘πυρήνα’ και κάθε εξαγόμενο που παράγει σε μια συνεδρία. Αυτή η καταστιχογράφηση των ‘εντολών’ (statements) εμφανίζεται στο front end με τη χρήση των **In** και **Out** ετικετών. Για να προσθέσουμε το 14 στο 7, πληκτρολογούμε την παράσταση 7 + 14 και εν συνεχεία με `Shift+Enter` εμφανίζεται το αποτέλεσμα στην οθόνη του υπολογιστή ως ακολούθως:

```
In[1]:= 5+3

Out[1]= 8
```

Να σημειώσουμε ότι οι ετικέτες (με μπλε χρώμα) **In[1]:=** και **Out[1]=**, που το front end έχει επισυνάψει, δηλώνουν την ‘είσοδο’ (Input) και την ‘έξοδο’ (Output), από τον πυρήνα, του υπολογισμού που ζητήσαμε και τυπώνονται αυτόματα από το ίδιο το πρόγραμμα με αύξοντα αριθμό προσδιορίζοντας έτσι τη σειρά εκτέλεσης της αντίστοιχης πράξης στη διάρκεια της συγκεκριμένης συνεδρίας. Αυτό είναι το σειριακό σχήμα ιχνηλάτησης των εισόδων και εξόδων από και προς τον πυρήνα.

Για να πολλαπλασιάσουμε το 15 με το 104.7, πληκτρολογούμε 15*104.7 ή 15 104.7 (κενό σε μια έκφραση εκλαμβάνεται ως πολλαπλασιασμός) και `Shift+Enter`

```
In[2]:= 13*203.8

Out[2]= 2649.4
```

Επειδή αυτό ήταν η δεύτερη είσοδος στον πυρήνα (σ' αυτήν τη συνεδρία) επισυνάφτηκε η ετικέτα **In[2]:=** και στην έξοδό της η **Out[2]=**. Όπως είπαμε, ο πυρήνας της *Mathematica* κρατάει αρχείο όλων των εντολών εισόδου και εξόδου σε μια συνεδρία της *Mathematica* (μια συνεδρία ορίζεται ως το διάστημα εργασίας από την ''είσοδό'' μας στον πυρήνα της *Mathematica* έως την αποχώρηση).

Είναι δυνατό να αναφερόμαστε σε μια 'εισαγόμενη εντολή' (input statement) ως **In[k]** ή σε μια 'εξαγόμενη εντολή' (output statement) ως **Out[k]**, όπου **k** είναι ένας θετικός ακέραιος που αναφέρεται στην k^{η} εντολή σε μια συνεδρία της *Mathematica*. **In** και **Out** είναι, στην πραγματικότητα, συναρτήσεις της *Mathematica* που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εισαγόμενες εκφράσεις. Για παράδειγμα, μπορούμε να ζητήσουμε από τη *Mathematica* να εκτελέσει τη δεύτερη εισαχθείσα εντολή ξανά

```
In[3]:= In[2]

Out[3]= 2649
```

Να σημειώσουμε ότι η δεύτερη είσοδος καθοδήγησε τη *Mathematica* να πολλαπλασιάσει το 15 με το 104.7. Στη συνέχεια, προσθέτουμε τα δύο προηγούμενα εξαγόμενα

```
In[4]:= Out[1]+Out[2]

Out[4]= 2657.4
```

Το αποτέλεσμα αυτό είναι το ίδιο με το 21 + 1570.5. Μπορούμε να αναφερόμαστε στη k^{η} προηγούμενη έξοδο (εξαγχθείσα εντολή) ή είσοδο (εισαχθείσα εντολή) ως **Out[-k]** ή **In[-k]** αντίστοιχα. Μια συντομογραφία της **Out[-1]** είναι **%**, και της **Out[-2]** είναι **%%**. Επίσης **%k** είναι μια συντομογραφία της **Out[k]**. Για παράδειγμα, έχουμε την παρακάτω ακολουθία εντολών της *Mathematica*

```
In[5]:= 3-4

Out[5]:= -1
```

Πολλαπλασίασε με 7 το τελευταίο αποτέλεσμα, δηλ. 7*(-3)

```
In[6]:= 5*%

Out[6]= -5
```

Πολλαπλασίασε με 8 το τελευταίο αποτέλεσμα, δηλ. 8*(-21)

```
In[7]:= 6*%

Out[7]= -30
```

Δώσε το τρίτο κατά σειρά προηγούμενο αποτέλεσμα, δηλ. –3

```
In[8]:= In[-3]

Out[8]= -1
```

Για τη διόρθωση ενός λάθους τα πράγματα είναι εύκολα. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να διορθώσουμε το 2 σε 3 στον αριθμό 6529 αφού φέρουμε τον δείκτη στη θέση μεταξύ 2 και 9, πατάμε το σχετικό πλήκτρο του ποντικιού (απλό αριστερό κλικ), οπότε εμφανίζεται η γνωστή αναβοσβήνουσα γραμμή – ο λεγόμενος ‘δρομέας’ (cursor) – η οποία συνόδευε, όπως θα παρατηρήσατε, τη διαδικασία πληκτρολόγησης. Για να σβήσουμε το 2 πατάμε το πλήκτρο ⇐ (backspace) οπότε σβήνεται το 2και αντικαθίσταται μετά με το ψηφίο που θέλουμε, απλά πληκτρολογώντας 3.

Να τονίσουμε τέλος ότι γενικά κενά διαστήματα (blank spaces) αγνοούνται από τη *Mathematica* εκτός αν αντιστοιχούν σε πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα, 4 + 5 αντιμετωπίζεται το ίδιο με 4+5.

1.1.2 Αριθμοί, σύμβολα και ανάθεση

Η *Mathematica* κάνει αριθμητική διαφορετικά απ’ ότι οι παραδοσιακοί calculators. Κάνει τους υπολογισμούς της χρησιμοποιώντας αριθμητική ρητών. Αυτό επιτρέπει ορισμένοι τύποι υπολογισμών να εκτελούνται με άπειρη ακρίβεια. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός μιας έκφρασης όπως της (4 + 1)/3 σ’ έναν calculator θα είχε ως αποτέλεσμα τη δεκαδική προσέγγιση 1.666666666 και όχι την ακριβή απάντηση 5/3. Η *Mathematica* μεταχειρίζεται το 5/3 ως ένα σύμβολο στο αριθμητικό σύστημα των ρητών και δεν το προσεγγίζει με το δεκαδικό του ανάπτυγμα. Ένα άλλο παράδειγμα της αναπαράστασης, στη *Mathematica*, των αριθμών ως σύμβολα είναι ο υπολογισμός του εμβαδού ενός κύκλου ακτίνας 3

```
In[9]:= Pi*3^2

Out[9]= 9Pi
```

Εδώ, **Pi** είναι το σύμβολο για τον άρρητο αριθμό **π**. Υπάρχουν και άλλα ειδικά σύμβολα στη *Mathematica*. Ένας πίνακας για τους πιο σημαντικούς μαθηματικούς αριθμούς είναι

Σύμβολο στη *Mathematica*	**Αριθμός**
Pi	**π ≈ 3.14159**
E	**e ≈ 2.71828**
I	i
Infinity	∞
- Infinity	**-** ∞

Να σημειώσουμε ότι στη *Mathematica* οι built-in σταθερές αρχίζουν πάντα με κεφαλαίο γράμμα (ή $). Η *Mathematica* διακρίνει μεταξύ κεφαλαίων και πεζών (case sensitive). Έτσι, **Pi** είναι διαφορετικό από το **pi** και το **E** διαφορετικό από το **e**. Επειδή όλες οι built-in σταθερές και συναρτήσεις στη *Mathematica* αρχίζουν με ένα κεφαλαίο γράμμα, ενδείκνυται οι σταθερές και οι συναρτήσεις που ορίζονται από το χρήστη να αρχίζουν με ένα πεζό γράμμα.

Για να αναθέτουμε εκφράσεις της *Mathematica* σε σύμβολα ορισμένα από το χρήστη, χρησιμοποιούμε τον τελεστή **Set** (**=**), ή τον τελεστή **SetDelayed** (**:=**). Αυτοί οι δυο τελεστές διαφέρουν ως προς τον τρόπο που γίνεται η ανάθεση. Θα εξετάσουμε τις διαφορές μεταξύ των δύο ‘πράξεων’ (operations) αφού μάθουμε πως να χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **Set**.

Ας αναθέσουμε το σύμβολο u στο – 3 και το σύμβολο v στο (1 – 9)π

```
In[10]:= u=-3

Out[10]:=-3

In[11]:= v=(1-9)*Pi

Out[11]:=-8Pi
```

Οι παρενθέσεις στις εκφράσεις (εισόδου και εξόδου) της *Mathematica* χρησιμοποιούνται ως αλγεβρικοί deliminators. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε τα u και v σε άλλες εκφράσεις της *Mathematica*. Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε 3u – 5v και ας αναθέσουμε την τιμή του στο σύμβολο w

```
In[12]:= w=3*u-5*v

Out[12]:= -9+40Pi
```

Μπορούμε πάντα να ρωτάμε τη *Mathematica* ποια έκφραση ανατεθεί σ’ ένα σύμβολο εισάγοντας το σύμβολο. Ας ζητήσουμε πληροφορία για την ανάθεση στο v

```
In[13]:= v

Out[13]= -8Pi
```

Για να άρουμε μια ανάθεση σ’ ένα σύμβολο, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **Clear**

```
In[14]:= Clear[v]
```

Ας ρωτήσουμε τώρα ποια έκφραση επί του παρόντος έχει ανατεθεί στο σύμβολο v

```
In[15]:= v

Out[15]= v
```

Όταν το *Mathematica* επιστρέφει το όνομα του συμβόλου, δηλώνει ότι οποιαδήποτε εκχώρηση σ' αυτό το σύμβολο δεν μπορεί να πάρει τιμή ή σε αυτή τη περίπτωση καμία έκφραση δεν έχει εκχωρηθεί στο v. Μια εναλλακτική μέθοδος για να διαγράψουμε μια ανάθεση από ένα σύμβολο είναι να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή **Unset**. Για παράδειγμα για να διαγράψουμε οποιαδήποτε ανάθεση από το σύμβολο v χρησιμοποιούμε την ακόλουθη έκφραση:

```
In[16]:= v =.
```

Σε οποιαδήποτε ανάθεση από τα παραπάνω σύμβολα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή **SetDelayed(:=)** αντί για τον τελεστή **Set(=).**

Παρουσιάζουμε τώρα τις διαφορές μεταξύ των τελεστών **Set** και **SetDelayed.** Όταν εισάγουμε μια έκφραση στο *Mathematica* της μορφής symb = expr, το *Mathematica* αποτιμά το δεξιό μέρος της έκφρασης (expr) και εκχωρεί στο σύμβολο symb τη τιμή του expr. Στη παράσταση symb:=expr το δεξιό μέρος καθυστερεί να πάρει τιμή μέχρις ότου το σύμβολο symb χρησιμοποιηθεί από άλλη παράσταση του *Mathematica* .Πιο κάτω είναι ένα παράδειγμα που δείχνει τη διαφορά .Θεωρούμε ότι το b δηλώνει μία σταθερά που αρχικά καταχωρούμε σ' αυτήν την τιμή –3.

```
In[17]:= b=3

Out[17]= -3
```

Ας αναθέσουμε την έκφραση 1+b σε δύο νέα σύμβολα *immediate* και *delayed.* Εφόσον και τα δύο είναι μεταβλητές που ορίζονται από τον χρήστη ,χρησιμοποιούνται πεζά γράμματα. Η παράσταση

```
In[18]:= immediate=1+b

Out[18]= -2
```

χρησιμοποιεί τον τελεστή **Set** και το 1+b εκχωρήθηκε αμέσως στο σύμβολο immediate. Ωστόσο η παράσταση

```
In[19]:= delayed:=1+b
```

που χρησιμοποιεί τον τελεστή **SetDelayed** δεν παράγει αποτέλεσμα εξόδου. Το δεξιό μέρος της έκφρασης της συνάρτησης **SetDelayed** 1+b δεν παίρνει τιμή μέχρι το σύμβολο *delayed* να χρησιμοποιηθεί. Τώρα ερευνούμε τι υπάρχει αποθηκευμένο στο σύμβολο *delayed*

```
In[20]:= delayed

Out[20]= -2
```

Αυτό ήταν αναμενόμενο αφού ο υπολογισμός 1+(-3) εκτελέστηκε στη τελευταία παράσταση εισόδου. Ας υποθέσουμε ότι αλλάζουμε τη τιμή του b σε 5

```
In[21]:= b=5

Out[21]= 5
```

Τι εκχωρείται στα σύμβολα **immediate** και **delayed**?

```
In[22]:= immediate

Out[22]= -2

In[23]:= delayed

Out[23]= 6
```

Προσέξτε τις διαφορές : στο immediate εκχωρήθηκε η τιμή –2 από την άλλη το delayed 1+b ξανά υπολογίσθηκε στη τελευταία δήλωση με b=5 και τώρα έχει τιμή 6.

1.1 Συναρτήσεις

Η *Mathematica* έχει μια εντυπωσιακή λίστα από ενσωματωμένες συναρτήσεις. Επιτρέπει επίσης στους χρήστες να ορίζουν τις δικές τους συναρτήσεις.

1.1.1 Ενσωματωμένες συναρτήσεις του *Mathematica*

Οι ενσωματωμένες συναρτήσεις της *Mathematica* έχουν ονόματα παρόμοια με το συνηθισμένο μαθηματικό σύστημα συμβόλων και χαρακτήρων. Όλες οι ενσωματωμένες συναρτήσεις της *Mathematica* ξεκινούν με κεφαλαίο γράμμα και τα ορίσματα τους περικλείονται σε αγκύλες. Για παράδειγμα η συνάρτηση ημιτόνου, sinx, συμβολίζεται ως **Sin[x]** στη *Mathematica.* Πιο κάτω υπάρχει ένας πίνακας με τις πιο συνηθισμένες στη χρήση συναρτήσεις:

Abs[x]	απόλυτη τιμή, $\lvert x \rvert$
Sqrt[x]	τετραγωνική ρίζα ,$\sqrt{x}$
Exp[x]	εκθετική συνάρτηση,e^x
Log[x]	φυσικός λογάριθμος ,lnx
Log[a,x]	λογάριθμος με βάση α, $\log_a x$
Sin[x],Cos[x],Tan[x]…	τριγωνομετρικές συναρτήσεις με ορίσματα ακτίνια
ArcSin[x],ArcCos[x],…	αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις
Factorial[n] (n!)	παραγοντική συνάρτηση
Random []	σταθερός ψευδοτυχαίος αριθμός μεταξύ 0 και 1
N[x]	αριθμητική τιμή του x
N[x,n]	τιμή του x με n–ψήφια ακρίβεια
Re[z]	πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z

Im[z]	φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z
Conjugate[z]	συζυγής του μιγαδικού αριθμού z

Η *Mathematica* έχει ένα ενσωματωμένο χαρακτηριστικό βοήθειας που μας επιτρέπει να πάρουμε πληροφορίες για οποιαδήποτε συνάρτηση. Για να πάρουμε πληροφορίες για κάποια συνάρτηση εισάγουμε την έκφραση **?***όνομα της συνάρτησης*. Για παράδειγμα αν θέλουμε να βρούμε πληροφορίες για τη συνάρτηση **Log** γράφουμε την εξής έκφραση:

```
In[24]:= ?Log
```

Log[z] gives the natural logarithm of z (logarithm to base e). Log[b,z] gives the logarithm to base b.

{Η Log[z] δίνει τον φυσικό λογάριθμο του z (λογάριθμος με βάση e). Η Log[b,z] δίνει το λογάριθμο με βάση b}

Όπως βλέπουμε, η *Mathematica* περιγράφει δυο μορφές της λογαριθμικής συνάρτησης. Τη **Log[z]** για το φυσικό λογάριθμο logz και τη **Log[b,z]** για τον λογάριθμο με βάση b, $\log_b z$.

Οι συναρτήσεις μπορεί να έχουν άλλες συναρτήσεις ως ορίσματα. Για παράδειγμα για να εισάγουμε την έκφραση sinh(log(sin π/4) θα χρησιμοποιήσουμε την πιο κάτω παράσταση στο *Mathematica:*

```
In[25]:= inh[Log[Sin[Pi/4]]]
```

Out[25]= $\frac{-1}{2Sqrt[2]}$

Η *Mathematica* γνωρίζει συνήθως μερικές θεμελιώδεις ιδιότητες μιας μαθηματικής συνάρτησης .Π.χ γνωρίζει ότι η εκθετική συνάρτηση και η συνάρτηση φυσικού λογαρίθμου είναι αντίστροφες.

```
In[26]:= Clear[x];
       Exp[Log[x]]

Out[27]= x
```

Η *Mathematica* περιέχει μια ενσωματωμένη συνάρτηση που θα υπολογίσει τη δεκαδική αναπαράσταση της έκφρασης. Η αριθμητική συνάρτηση **N** θα υπολογίσει την αριθμητική τιμή της έκφρασης :

```
In[28]:= ?N
```

N[expr] gives the numerical value of expr. N[expr, n] attempts to give a result with n-digit precision.

{H N[exp] δίνει την αριθμητική τιμή της expr. H N[expr,n] κάνει υπολογισμούς με n-ψηφια ακρίβεια }

Για παράδειγμα μπορούμε να βρούμε μια αριθμητική προσέγγιση για το π

```
In[29]:= N[Pi]

Out[29]= 3.14159
```

Εναλλακτικά το **N** με δυο ορίσματα υπολογίζει την αριθμητική τιμή του πρώτου ορίσματος με την ακρίβεια που ορίζει το δεύτερο όρισμα

```
In[30]:= N[Pi,25]

Out[30]= 3.141592653589793238462643 4
```

Οι συναρτήσεις της *Mathematica* μπορούν να δεχτούν μιγαδικούς αριθμούς ως ορίσματα και οι τιμές αυτών των συναρτήσεων μπορεί να είναι μιγαδικοί αριθμοί (ακόμα και με ορίσματα πραγματικούς αριθμούς)

```
In[31]:= Sqrt[-2]

Out[31]= iSqrt[2]

In[32]:= Sqrt[-4*I]
```

Out[32]= $-2(-1)^{3/4}$

Για να εισάγουμε ένα μιγαδικό αριθμό χρησιμοποιούμε το σύμβολο **I**, που δηλώνει τον φανταστικό αριθμό √-1. Ας υποθέσουμε ότι το σύμβολο *a* εκχωρείται για την έκφραση 4+3i και το σύμβολο *b* για την έκφραση 2-i. Το *Mathematica* θα πραγματοποιήσει διάφορες αριθμητικές πράξεις με αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς

```
In[33]:= a=4+3*I

Out[33]= 4+3I

In[34]:= b=2-I

Out[34]= 2-I

In[35]:= a+b

Out[35]= 6+2I

In[36]:= a/b
```

```
Out[36]= 1+2I
```

Μπορούμε επίσης να βρούμε μια αριθμητική προσέγγιση για μια μιγαδική μαθηματική έκφραση:

```
In[37]:= N[Exp[a]]

Out[37]= -54.0518+7.70489I
```

Οι συναρτήσεις **Re**, **Im** και **Conjugate** υπολογίζουν το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος και τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού.

```
In[38]:=  Re[a]

Out[38]=  4

In[39]:=  Im[b]

Out[39]=  -1

In[40]:=   Conjugate[a]

Out[40]=  4-3I
```

Ένας εναλλακτικός τρόπος να εφαρμόσουμε μια συνάρτηση σε μια μαθηματική έκφραση είναι να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή (//). Η δήλωση *expr//fct,* μεταφράζεται ως *ftc[expr]*. Για παράδειγμα η ακόλουθη δήλωση είναι πανομοιότυπη με την **Sin[Pi/4]:**

```
In[41]:= Pi/4 //Sin
```

Out[41]**=** $\frac{-1}{2Sqrt[2]}$

Η επόμενη είναι η ίδια με τη **N[Pi]**

```
In[42]:= Pi //N

Out[42]= 3.14159
```

1.1.2 Συναρτήσεις που ορίζονται από τον χρήστη

Παράλληλα με τις ενσωματωμένες συναρτήσεις η *Mathematica* επιτρέπει στους χρήστες να ορίζουν τις δικές τους συναρτήσεις. Για να ορίσουμε μια συνάρτηση θα πρέπει να καθορίσουμε το σύμβολο που θα δηλώνει το όνομα της συνάρτησης (στη γλώσσα της

Mathematica, το **Head – Επικεφαλίδα** της συνάρτησης), όπως επίσης και τους κανόνες που περιγράφουν την εφαρμογή της πάνω στα ορίσματά της.
Η μορφή του ορισμού μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής είναι:

symb0[symb1_]:= ορισμός συναρτήσει του *symb1*

όπου *symb0* συμβολίζει την **Επικεφαλίδα (Head)** της συνάρτησης δηλ. το όνομα της συνάρτησης. *symb1* είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, ή το όρισμα, της συνάρτησης. Η έκφραση *symb1_* (με μια κάτω παύλα στο τέλος) δηλώνει ένα pattern. *symb1* μπορεί να είναι ένας αριθμός, ένα σύμβολο ή μια άλλη συνάρτηση. Για παράδειγμα, για να ορίσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2-3x+4$ θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες εντολές:

```
In[43]:= Clear[f,x];
         f[x_]:=x^2-3*x+4
```

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή **Set (=)** ή τον τελεστή **SetDelayed(:=)** στην εντολή ορισμού. Σαν γενικό κανόνα, είναι καλύτερο να χρησιμοποιούμε **SetDelayed**. Το σύμβολο **x_** είναι μια pattern. Αυτό σημαίνει ότι το όρισμα της συνάρτησης μπορεί να είναι οτιδήποτε, όχι μόνον x. Για παράδειγμα:

```
In[45]:= f[4]

Out[45]:= 8

In[46]:= f[x^2]
```

Out[46]= $4-3x^2+x^4$

```
In[47]:= f[z]
```

Out[47]= $4-3z+z^2$

Ας υποθέσουμε ότι δεν χρησιμοποιούμε την κάτω παύλα (_) στον ορισμό

```
In[48]:= Clear[g];
         g[x_]:= x^2 – 3*x +4
```

Όταν ζητήσουμε από τη *Mathematica* να δώσει τιμή σε αυτή τη συνάρτηση, όταν το όρισμα της είναι 4, δίνει τα πιο κάτω

```
In[50]:= g[4]

Out[50]= g[4]
```

Η *Mathematica* επιστρέφει την τιμή εισόδου ως αποτέλεσμα εξόδου εφόσον δε ξέρει τι τιμή θα δώσει στο **g[4].** Το μόνο πράγμα που έχει οριστεί σε ότι αφορά το **g** είναι το σύμβολο **g[x].**

Συναρτήσεις με περισσότερες από μια μεταβλητές ορίζονται με παρόμοιο τρόπο. Για παράδειγμα για τον υπολογισμό μιας συνάρτησης παραγωγής *Cobb-Douglas* με δεδομένα εισόδου τις μεταβλητές εργασία *(L)* και κεφάλαιο *(K)*

$$f(L,K)=10L^{0,6}K^{0,3}$$

θα χρησιμοποιούσαμε τον ακόλουθο ορισμό στο *Mathematica*

```
In[51]:= Clear[f,L,K];
         F[L_,K_]:= 10*L^0.6*K^0.3;
```

Η συνάρτηση μετά δίνει διαφορετικές τιμές για το *L* και το *K*

```
In[53]:= f[5,8]

Out [53]= 49.0127

In[54]:= f[6,3]

Out[54]= 40.7406
```

Όταν ορίζουμε μια συνάρτηση στη *Mathematica* είναι μερικές φορές αναγκαίο να συμπεριλάβουμε μερικές συνθήκες στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x<0 \\ 2x, & x>0 \end{cases}$$

Για να ορίσουμε αυτή τη συνάρτηση στη *Mathematica* χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **Condition (/;).** Ακολουθεί η περιγραφή της συνάρτησης

In[55]:=?Condition

patt /; test is a pattern which matches only if the evaluation of test yields True. lhs :> rhs /; test represents a rule which applies only if the evaluation of test yields True. lhs := rhs /; test is a definition to be used only if test yields True.

{το patt /; test είναι ένα pattern που ισχύει μόνο όταν η τιμή του test είναι True. lhs :> rhs /; test αντιπροσωπεύει έναν κανόνα που εφαρμόζεται μόνο όταν η τιμή του Test είναι και πάλι True. lhs := rhs /; test είναι ένας ορισμός που χρησιμοποιείται μόνον αν η test δίνει True.}

Όπως βλέπουμε από την περιγραφή η μορφή για να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον τελεστή σε ένα ορισμό είναι *patt/;test*. Το *patt* είναι μια μεταβλητή και η έκφραση *test* θα πρέπει να είναι υπό τη μορφή μιας λογικής έκφρασης όπως της **x>0** ή **x = = 0.** Αυτές οι λογικές εκφράσεις παίρνουν τιμές στη *Mathematica* **Αληθής (True)** ή **Ψευδής (False),** ή δεν παίρνουν τιμές αν η συνάρτηση δεν μπορεί να καθοριστεί αν είναι **Αληθής (True)** ή **Ψευδής (False).** Για παράδειγμα μελετείστε τις πιο κάτω εκφράσεις

```
In[56]:= -3<4

Out[56]= True

In[57]:= 3= =5

Out[57]= False

In[58]:= Clear[y];
         y<3

Out[59]= y<3
```

Στο τελευταίο παράδειγμα, η *Mathematica* δεν μπορούσε να δώσει τιμές σε αυτή την παράσταση, αν είναι **Αληθής (True)** ή **Ψευδής (False)** και ως αποτέλεσμα επέστρεψε το δεδομένο εισόδου χωρίς τιμή. Χρησιμοποιώντας τον τελεστή condition για να ορίσουμε την *f(x)* που δόθηκε πιο πάνω

```
In[60]:=
       Clear[f,x];
       f[x_ /;x<0]:= x^2
       f[x_ /;x>0]:= 2*x
```

Ζητάμε τώρα τις τιμές της *f(x)* για διάφορες τιμές του *x*

```
In[63]:= f[-1]

Out[63]= 1

In[64]:= f[2]

Out[64]= 4

In[65]:= f[0]

Out[65]= f[0]
```

Μπορούμε πάντοτε να ζητήσουμε τον ορισμό ενός συμβόλου. Υποθέτουμε ότι ζητάμε από τη *Mathematica* να μας πει τι ορισμούς έχει αποδώσει στην **Επικεφαλίδα** της **f.** Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση του **?**.

```
In[66]:=?f
```

Global`f

f[x_ /;x<0]:= x^2

f[x_ /;x>0]:= 2*x

Η καθολική **Global`f** αναφέρεται στο περιβάλλον του συμβόλου *f* και μπορούμε να το αγνοήσουμε.

1.1.3 Αλγεβρικοί χειρισμοί

Η *Mathematica* έχει διάφορες ενσωματωμένες συναρτήσεις για να χειρίζεται τις μαθηματικές εκφράσεις. Αυτές οι συναρτήσεις θα εκτελέσουν τα διάφορα αλγεβρικά θέματα για τα μεγάλα γινόμενα, την παραγοντοποίηση, την εύρεση κοινών παρονομαστών και τη μερική κλασματική ανάπτυξη. Οι σημαντικότερες συναρτήσεις χειρισμού είναι η **Expand,** η **Together**, η **Apart** και η **Simplify**. Στη συνέχεια δίνεται μια περιγραφή αυτών των συναρτήσεων

- **Expand**
```
In[67]:= ?Expand
```

Expand[expr] expands out products and positive integer powers in expr. Expand[expr, patt] leaves unexpanded any parts of expr that are free of the pattern patt.

{Η Expand[expr] αναπτύσσει γινόμενα και θετικές ακέραιες δυνάμεις στην expr. Η Expand[expr, patt] αποφεύγει να επεκτείνει στοιχεία της expr που δεν περιέχουν συνθήκες ή κανόνες που ισχύουν στη μεταβλητή patt.}

```
In[68]:= Clear[x]
         Expand [(x-2)*(x+1)^2]
```

Out[69]= $-2-3x+x^2$

- **Factor**
```
In[70]:=?Factor
```

Factor[poly] factors a polynomial over the integers. Factor[poly, Modulus->p] factors a polynomial modulo a prime p.

{Η Factor[poly] παραγοντοποιεί ένα πολυώνυμο στο σύνολο των ακεραίων. Η Factor[poly,Modulus->p] παραγοντοποιεί ένα πολυώνυμο modulo έναν πρώτο p.}

```
In[71]:= Clear[x]
         Factor[x^3-3*x-2]
```

Out[72]= $(-2+x)(1+x)^2$

- **Together**

```
In[73]:= ?Together
```

Together[expr] puts terms in a sum over a common denominator, and cancels factors in the result.

{Η Together[expr] τοποθετεί τους αριθμούς υπό τη μορφή αθροίσματος πάνω από ένα κοινό παρονομαστή και διαγράφει τους παράγοντες στο αποτέλεσμα.}

```
In[74]:= Clear[x]
        Factor[x^3 -3*3 -2]
```

Out[75]= $\dfrac{-18-31x-3x^2+7x^3}{(-2+x)x(1+x)^2}$

- **Apart**

Apart[expr] rewrites a rational expression as a sum of terms with minimal denominators. Apart[expr, var] treats all variables other than var as constants.

{Η Apart[expr] γράφει ξανά τη ρητή έκφραση υπό τη μορφή αθροίσματος των όρων με ελάχιστους παρονομαστές. Η Apart[expr, var] θεωρεί όλες τις μεταβλητές εκτός της var ως σταθερές}

```
In[77]:= Clear[x]
        Apart[(-18-31*x-31*x-3^2+7*x^3)/((-2+x)*x*(1+x)^2)]
```

Out[78]= $\dfrac{-2}{-2+x}+\dfrac{9}{x}+(1+x)^{-2}$

- **Simplify**

```
In[79]:= ?Simplify
```

Simplify[expr] performs a sequence of algebraic transformations on expr, and returns the simplest form it finds.

{Η Simplify[expr] πραγματοποιεί μια σειρά αλγεβρικών μετασχηματισμών στην expr και επιστρέφει τη απλούστερη μορφή που θα βρει.}

```
In[80]:= Clear[x]
```

```
Simplify[Sin[x]^2+Cos[x]^2–1/x+1/(x+1)]
```

Out[81]=$1-\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x}$

1.1.4 Λίστες και πίνακες

Μια λίστα στη *Mathematica* είναι μια συλλογή από αντικείμενα που περικλείονται σε αγκύλες {}. Η συλλογή είναι κάπως γενική. Μπορεί να περιλαμβάνει αριθμούς, συναρτήσεις, σύμβολα, γραφήματα, ή άλλες λίστες. Πιο κάτω υπάρχει ένα παράδειγμα λίστας στη *Mathematica.*

```
In[82]:= Clear[apple,x,y,w,z];
         a = {-5,apple, 3^(-4), {x,y,{w,z}}}
```

Out[83]={-5,apple, $\frac{1}{81}$,{x,y,{w,z}}}

Το ν-οστό στοιχείο της λίστας δηλώνεται με διπλές αγκύλες **[[]].** Αυτή είναι μια σύντομη δήλωση για μια ενσωματωμένη συνάρτηση την **Part.** Αν το a είναι μια λίστα, τότε το πρώτο της στοιχείο είναι το **a[[1]]**, το δεύτερο είναι το **a[[2]]** κ.τ.λ. Αν μερικά στοιχεία των υπολοίπων δηλώνονται με τη χρήση περισσότερων από ενός ορίσματος μέσα στις διπλές αγκύλες **[[]]**. Παραθέτονται παραδείγματα πιο κάτω:

```
In[84]:= a[[1]]

Out[84]= -5

In[85]:= a[[4,2]]

Out[85]= y

In[86]:= a[[4,3,1]]

Out[86]= w
```

Μερικές βασικές οντότητες των Μαθηματικών συχνά αναπαριστώνται ως λίστες στη *Mathematica.* Π.χ τα διανύσματα και οι μήτρες αναπαριστώνται ως λίστες στο *Mathematica.* Επιπλέον, η *Mathematica* επιτρέπει στους βασικούς αριθμητικούς τελεστές να εφαρμόζονται σε λίστες. Πιο κάτω είναι ο τελεστής της πρόσθεσης σε δυο λίστες.

```
In[87]:=
      a = {2,9,5};
      b = {-3,1,-6};
      a+b
```

```
Out[89]= {-1,10,-1}
```

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε μερικές συναρτήσεις στις λίστες :

```
In[90]:= Sqrt [a]

Out[90]= {Sqrt[2], 3, Sqrt[5]}
```

Μερικές ενσωματωμένες συναρτήσεις του *Mathematica* παράγουν λίστες ως αποτέλεσμα. Μια από αυτές είναι η **Table.**

In[91]:=?Table

Table[expr, {imax}] generates a list of imax copies of expr. Table[expr, {i, imax}] generates a list of the values of expr when i runs from 1 to imax. Table[expr, {i, imin, imax}] starts with i = imin. Table[expr, {i, imin, imax, di}] uses steps di. Table[expr, {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...] gives a nested list. The list associated with i is outermost.

{Η Table[expr, {imax}] παράγει μία λίστα από αντίγραφα του imax της expr.Η Table[expr, {i, imax}] παράγει μία λίστα από τις τιμές της expr όταν η i ξεκινά από το 1 μέχρι το Imax. Η Table[expr, {i, imin, imax}] ξεκινά με i=imin. Η Table[expr, {i, imin, imax, di}] χρησιμοποιεί βήμα di. Η Table[expr,{i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...] δίνει μια εμφωλευμένη λίστα. Η λίστα συνδέεται με το i.}

Όπως βλέπουμε η συνάρτηση **Table** έχει πολλές διαφορετικές μορφές. Ας μελετήσουμε τη μορφή **Table***[expr, {i, imin, imax, di}]*. Παράγει μία λίστα από τιμές της *expr* όταν το *i* ξεκινά από το *imin* μέχρι το *imax* και αυξάνεται κατά *di*. Πιο κάτω είναι ένα παράδειγμα μίας λίστας της συνάρτησης **Table.**

```
In[92]:= Table[I^2,{i,2,10,1,5}]

Out[92]= {4,12.25,42.25,64,90.25}
```

1.3 Άλγεβρα και Μαθηματική Ανάλυση

Η *Mathematica* μπορεί να πραγματοποιήσει πολλά προβλήματα άλγεβρας και μαθηματικής ανάλυσης συμβολικά. Μπορεί να υπολογίσει αθροίσματα και γινόμενα ακολουθιών, να βρίσκει ρίζες ενός πολυωνύμου να λύνει εξισώσεις να διαφοροποιεί και να ολοκληρώνει συναρτήσεις.

1.3.1 Αθροίσματα και Γινόμενα

Η *Mathematica* μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό του αθροίσματος και του γινομένου των όρων μιας ακολουθίας. Για τον υπολογισμό χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση Sum.

```
In[93]:= ?Sum
```

Sum[f, {i, imax}] evaluates the sum of f with I running from 1 to imax. Sum[f, {i, imin, imax}] starts with i=imin. Sum[f, {i, imin, imax, di}] uses steps di. Sum[f, {i, imin,imax}, {j, jmin, jmax}, ...] evaluates a multiple sum.

{H Sum[f, {i, imax}] βρίσκει το άθροισμα της f με το i να ξεκινά από το 1 μέχρι το imax. H Sum[f, {i, imin, imax}] ξεκινά με i=imin. H Sum[f, {i, imin, imax, di}] χρησιμοποιεί βήμα i. H Sum[f, {i, imin,imax}, {j, jmin, jmax}, ...] βρίσκει ένα πολλαπλάσιο άθροισμα.}

Για παράδειγμα για να πολλαπλασιάσουμε 1+2+3+...+100 χρησιμοποιούμε την ακόλουθη έκφραση της *Mathematica:*

```
In[94]:= Sum[i{i,1,100}]

Out[94]:= 5050
```

Το άθροισμα

$$1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots..+\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

μπορεί να υπολογισθεί με την παρακάτω εντολή

```
In[95]:= Sum[(2/3)^i,{i,0,10}]
```

Out[95]= $\frac{175099}{59049}$

Επιτρέπονται επίσης και συμβολικά αθροίσματα

```
In[96]:= Clear[f];
         Sum[f[i],{i,1,3}]

Out[97]= f[1]+f[2]+f[3]
```

Για ένα πολλαπλό άθροισμα

$$\sum_{i=n}^{m}\sum_{j=p}^{q}x_{ij}$$

χρησιμοποιούμε και πάλι τη συνάρτηση **Sum** με μια διαφορετική μορφή για τα ορίσματα της, δηλαδή με δύο 'επαναλήπτες' (iterators).

```
In[98]:= Clear[x];
         Sum[x[i,j],{i,1,3},{j,1,i}]

Out[99]= x[1,1] + x[2,1] + x[3,1] + x[3,3]
```

Η *Mathematica* δεν μπορεί να αθροίσει πολλές σειρές άπειρων όρων, όπως

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i$$

```
In[100]:= s= Sum[(2/(3*i))^(i),{i,1,Infinity)]
```

Out[100]= Sum[{($\frac{2}{3}$) ^{i} ($\frac{1}{i}$) ^{i} },{i,1,Infinity}]

Ωστόσο μπορεί να παρέχει μία προσέγγιση στο άθροισμα

```
In[101]:= N[s]

Out[101]= 0.789567
```

Για να υπολογίσουμε γινόμενα όπως

$$\prod_{i=n}^{m} x_i \quad \text{ή} \quad \prod_{i=n}^{m}\prod_{j=p}^{q} x_{ij}$$

χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **Product.** Πιο κάτω είναι η περιγραφή της συνάρτησης.

In[102]:= ?Product

Product[f, {i, imax}] evaluates the product of f with i running from 1 to imax. Product[f, {i, imin, imax}] starts with i = imin. Product[f, {i, imin, imax, di}] uses steps di.Product[f, {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...] evaluates a multiple product.

{H Product[f, {i, imax} δίνει τιμή στο γινόμενο της f με το i να ξεκινά από το 1 μέχρι το imax. H Product[f, {i, imin, imax}] ξεκινά με i=imin. H Product[f, {i, imin, imax, di}] χρησιμοποιεί βήμα di. H Product[f, {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...] δίνει τιμή σε πολλαπλό γινόμενο.}

Πιο κάτω υπάρχουν δυο παραδείγματα

```
In[103]:= Clear[x,y];
          Product[{i +x}^i,{i,1,5}]
```

Out[104]= $(1+x)(2+x)^2(3+x)^3(4+x)^4(5+x)^5$

```
In[105]:= Product[(i+x)(j+y),{i,1,3},{j,1,2}]
```

Out[105]= $(1+x)^2(2+x)^2(3+x)^2(1+y)^3(2+y)^3$

1.3.2 Λύνοντας εξισώσεις

Η συνάρτηση **Solve** στη *Mathematica* επιχειρεί να βρει ακριβείς λύσεις σε μια εξίσωση ή σε ένα σύστημα εξισώσεων.

```
In[106]:=?Solve
```

Solve[eqns, vars] attempts to solve an equation or set of equations for the variables vars. Any variable in eqns but not vars is regarded as a parameter. Solve[eqns] treats all variables encountered as vars above. Solve[eqns, vars, elims] attempts to solve the equations for vars, eliminating the variables elims.

{Η Solve[eqns, vars] επιχειρεί να λύσει μια εξίσωση ή ένα σύνολο εξισώσεων για τις μεταβλητές vars. Οποιαδήποτε μεταβλητή στο eqns αλλά όχι η vars θεωρείται ως παράμετρος. Η Solve[eqns] θεωρεί όλες τις μεταβλητές που υπάρχουν πιο πάνω ως vars. Η Solve[eqns, vars, elims] επιχειρεί να λύσει τις εξισώσεις για τις vars εξαλείφοντας τις μεταβλητές elims.}

Όπως βλέπουμε στη διάταξη της συνάρτησης αυτής, το πρώτο όρισμα περιέχει τις εξισώσεις που θα λυθούν και το δεύτερο όρισμα περιέχει τις μεταβλητές για τις οποίες θέλουμε τις λύσεις. Η ακόλουθη παράσταση του *Mathematica* λύνει την πολυωνυμική εξίσωση 3^{ου} βαθμού $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$. Σημειώστε ότι στη *Mathematica* το σύμβολο του ίσον συμβολίζεται με το λογικό τελεστή = =.

```
In[107]:= Clear[x];
          solution = Solve[x^3+2*x^2-x-2= =0,x]

Out[108]= {{x→2},{x→-1},{x→1}}
```

Το αποτέλεσμα **solution** της συνάρτησης **Solve** είναι μια λίστα από κανόνες αντικατάστασης του τύπου $x \to a$. Δηλώνει ότι η εξίσωση $x^3+2x^2-x-2=0$ ικανοποιείται εάν το x αντικατασταθεί είτε από $-2(x\to-2)$, $-1(x\to-1)$ ή $1(x\to1)$. Εάν θέλουμε τις λίστες να εκφρασθούν ως μία λίστα {-2,-1,1} αντί από μια λίστα κανόνων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή Replace All(/.)(δεν υπάρχει κενό μεταξύ / και .). Πιο κάτω είναι η περιγραφή της ενσωματωμένης συνάρτησης :

In[109]: = ?ReplaceAll

expr /. rules applies a rule or list of rules in an attempt to transform each subpart of an expression expr.

{Οι κανόνες expr/. απευθύνονται σε έναν κανόνα ή μια λίστα από κανόνες σε μια προσπάθεια να μετασχηματιστεί κάθε υποτμήμα της έκφρασης expr.}

Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση **ReplaceAll** ως τη συνάρτηση που πραγματοποιεί μια αντικατάσταση. Για παράδειγμα η ακόλουθη δήλωση αντικαθιστά το y με 9 στην έκφραση y^2+5.

```
In[110]:= Clear[y];
          y^2+5/.y→9

Out[111]= 86
```

Παρόμοια η ακόλουθη παράσταση με τη σειρά της αντικαθιστά το y με 9,-2 και 4 στην έκφραση το αποτέλεσμα είναι μια λίστα αριθμών

```
In[112]:= y^2 + 5 /. {{y→9},{y→-2},{y→4}}

Out[112]= {86,9,21}
```

Οι ακόλουθες δηλώσεις αντικαθιστούν μία λίστα από τρεις κανόνες που αποκομίσθηκαν από τη λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης 3ου βαθμού με μια λίστα από λύσεις {a,b,c} = {-2, -1, 1}.

```
In[113]:= Clear[x];
         solution = Solve[x^3+2*x^2-x-2= =0,x]

Out[114]= {x→-2},{x→-1},{x→1}}

In[115]:= {a,b,c} = x /. Solution

Out[115]= {-2,-1,1}
```

Για πολλές εξισώσεις η *Mathematica* δεν μπορεί να βρει ακριβείς λύσεις. Δεν υπάρχουν γενικές μαθηματικές μέθοδοι για την εύρεση σαφών λύσεων για μια πολυωνυμική εξίσωση 5ου βαθμού και άνω. Για παράδειγμα η *Mathematica* δεν μπορεί να βρει τις ρίζες του πολυώνυμου $x^5+x^3+1=0$.

```
In[116]:= Clear[x];
          Solve[x^5+x^3+1==0,x]

Out[117]= {ToRules[Roots[x5+x3==-1,x]]}
```

Το αποτέλεσμα αυτό δηλώνει ότι η **Solve** δεν μπορεί να βρει τις λύσεις στην εξίσωση. Εντούτοις υπάρχει μια παρόμοια συνάρτηση της **Solve** , η **NSolve** που επιχειρεί να βρει αριθμητικές λύσεις. Πιο κάτω η περιγραφή της:

In[118]:=?Solve

NSolve [eqns,vars] attemps to solve numerically an equation or set of equations for the variables vars. Any variables in eqns but not vars are regarded as a parameter. NSolve[eqns] treats all variables encountered as vars above. NSolve [eqns,vars,prec] attempts to solve numerically the equations for vars using prec digits precision.

{Η NSolve[eqns,vars] επιχειρεί να λύσει αριθμητικά μια εξίσωση ή ένα set εξισώσεων για τις μεταβλητές vars. Οποιαδήποτε μεταβλητή στο eqns αλλά όχι στο vars θεωρείται ως παράμετρος. Η NSolve[eqns] θεωρεί όλες τις μεταβλητές ως vars. Η NSolve [eqns,vars,prec] επιχειρεί να λύσει αριθμητικά τις εξισώσεις για τις vars χρησιμοποιώντας το prec για δεκαδική ακρίβεια.}

Χρησιμοποιώντας την **NSolve** για να στρογγυλοποιήσουμε τις ρίζες του πιο πάνω πολυώνυμου, βρίσκουμε ότι αυτό έχει μια πραγματική ρίζα και τέσσερις μιγαδικές:

```
In[119]:= Clear[x];
          NSolve[x^5+x^3+1==0,x]

Out[120]=
        {{x→-0.83762},{x→-0.217853-1.16695I}
         {x→-0.217853+1.16695I},{x→0.636663-0.64702I}
          {x→0.636663+0.664702I}}
```

Βρίσκοντας λύσεις για υπερβατικές εξισώσεις, είναι συχνά απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε ένα αριθμητικό σχέδιο όπως είναι η Μέθοδος Newton. Η *Mathematica* χρησιμοποιεί κι άλλες αριθμητικές μεθόδους όπως η **Find Root**.

```
In[121]:= ?FindRoot
```

FindRoot[lhs==rhs, {x, x0}] searches for a numerical solution to the equation lhs==rhs, starting with x=x0.

{Η FindRoot[lhs==rhs, {x, x0}] ψάχνει για μια αριθμητική λύση στη εξίσωση lhs==rhs ξεκινώντας με x= =x0.}

Το πρώτο όρισμα της **FindRoot** περιέχει την εξίσωση που θα λυθεί. Το δεύτερο όρισμα είναι μια λίστα που περιλαμβάνει τη μεταβλητή για την οποία θέλουμε τη λύση, και μια αρχική εικασία για τη λύση. Για παράδειγμα ας βρούμε μια προσεγγιστική λύση της εξίσωσης $x=log(x)+2x^2$

```
In[122]:= Clear[x];
          NSolve [x= =Log[x]+2*x^2, {x,1}]

Out[123]= {x→0.723576}
```

Σημειώνουμε ότι μπορεί να υπάρχουν κι άλλες λύσεις .Για να τις βρούμε διαλέγουμε διαφορετικές αρχικές εκτιμήσεις.

Μπορεί επίσης να λυθεί κι ένα σύστημα εξισώσεων με τις συναρτήσεις **Solve, NSolve** και **FindRoot**. Για παράδειγμα το σύστημα εξισώσεων

$x+ y =1$
$xy = -2$

έχει δύο λύσεις: (-1,2) και (2,-1)

```
In[124]:= Clear[x,y];
          Solve[{x+y==1, x*y==-2},{x,y}]

Out[125]={{x→-1,y→2},{x→2,y→-1}}
```

1.3.3 Λογισμός (Calculus)

Τρεις βασικές πράξεις της μαθηματικής ανάλυσης είναι ο υπολογισμός ορίων, παραγώγων και ολοκληρωμάτων. Η *Mathematica* έχει τις συναρτήσεις **Limit, D** και **Integrate** για να εκτελέσει αυτές τις πράξεις.

Η συνάρτηση **Limit** επιχειρεί να υπολογίσει το όριο μιας έκφρασης καθώς ένα από τα σύμβολα της έκφρασης προσεγγίζει μια συγκεκριμένη τιμή.

```
In[126]:=?Limit
```

Limit[expr, x->x0] finds the limiting value of expr when x approaches x0.

{H Limit[expr, x->x0] βρίσκει την οριακή τιμή της expr όταν το x προσεγγίζει το x0.}

Ακολουθεί ένα παράδειγμα για την εύρεση του ορίου μιας λογικής έκφρασης

```
In[127]:= Clear[x];
          Limit[{x^3-3*x^2+3*x-1)/(x-1),x→1]

Out[128]= 0
```

Οι παράγωγοι στη *Mathematica* υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση **D**

```
In[129]:=?D
```

D[f, x] gives the partial derivative of f with respect to x. D[f, {x,n}] gives the nth partial derivative of f with respect to x. D[f,x1, x2, ...] gives a mixed derivative.

{H D[f, x] δίνει τη μερική παράγωγο της f ως προς x. H D[f, {x,n}] δίνει τη ν-οστή μερική παράγωγο ως προς x. H . D[f,x1, x2, ...] δίνει τη μικτή παράγωγο.}

Στη πιο βασική μορφή το πρώτο όρισμα της **D** είναι η συνάρτηση που θα βρούμε το διαφορικό της και το δεύτερο όρισμα είναι η μεταβλητή του διαφορικού. Για παράδειγμα για να βρούμε το διαφορικό της συνάρτησης *xcos(2x)* ως προς *x* θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη έκφραση

```
In[130]:= Clear[x];
          D[x*Cos[2*x],x]

Out[131]= Cos[2x]-2xSin[2x]
```

Μια εναλλακτική μέθοδος διαφορικών συναρτήσεων μιας απλής μεταβλητής είναι να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο (΄) για την παράγωγο.

```
In[132]:= Clear[f,x];
          f[x_]:=x*Cos[2*x],x]
          f΄[x]

Out[134]= Cos2x – 2xSin[2x]
```

Μπορούν να υπολογισθούν παράγωγοι υψηλότερης τάξης εμφωλεύοντας τη συνάρτηση **D,** χρησιμοποιώντας πολλαπλά σύμβολα της παραγώγου ή καθορίζοντας μια λίστα για το δεύτερο όρισμα της **D** . Η λίστα πρέπει να είναι της μορφής *{x,n}* όπου *n* ο θετικός ακέραιος της παραγώγου. Για παράδειγμα για να υπολογίσουμε την τρίτη παράγωγο της πιο κάτω συνάρτησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε από τις ακόλουθες εκφράσεις:

```
In[135]:= Clear[x];
          D[D[D[x*Cos[2*x],x],x],x]

Out[136]= -12Cos[2x]+8xSin[2x]

In[137]:= f΄΄΄[x]

Out[137]= -12Cos[2x]+8xSin[2x]
```

```
In[138]:= D[x*Cos[2*x],{x,3}]

Out[138]= -12Cos[2x]+8xSin[2x]
```

Εάν μια έκφραση περιλαμβάνει περισσότερες από μια μεταβλητές τότε η συνάρτηση **D** υπολογίζει τις μερικές παραγώγους. Για να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι υψηλότερης τάξης θα πρέπει να προστεθούν τα ορίσματα στη συνάρτηση **D.** Για παράδειγμα για να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}(x^3 y^2 + x^4)$$

θα χρησιμοποιήσουμε τη παρακάτω έκφραση της *Mathematica:*

```
In[139]:= Clear[x,y];
          D[x^3*y^2+x^4,y,y,x]

Out[140]= 6x^2
```

Το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης μπορεί να υπολογισθεί με τη συνάρτηση **Dt**. Πιο κάτω η περιγραφή της

In[141]:=?Dt

Dt[f, x] gives the total derivative of f with respect to x. Dt[f] gives the total differential of f. Dt[f, {x, n}] gives the nth total derivative of f with respect to x. Dt[f, x1, x2, ...] gives a mixed total derivative.

{H Dt[f, x] δίνει την ολική παράγωγο της f ως προς x. H . Dt[f] δίνει το ολικό διαφορικό της f. H Dt[f, {x, n}] δίνει τη ν-οστή ολική παράγωγο ως προς x. H Dt[f, x1, x2, ...] δίνει μια μικτή ολική παράγωγο.}

Ας υπολογίσουμε το ολικό διαφορικό της xy^2+z^3

```
In[142]:= Clear[x,y,z];

         Dt[x*y^2+z^3]

Out[143]= y^2Dt[x]+2xyDt[y]+3z^2Dt[z]
```

Σε αυτό το αποτέλεσμα η **Dt[x]** παίζει το ρόλο του d*x* ,η **Dt[y]** παίζει το ρόλο του d*y* και η **Dt[z]** του d*z*.

Η *Mathematica* έχει τη δυνατότητα να πραγματοποιεί πολύ δύσκολα ολοκληρώματα. Η συνάρτηση **Integrate** χρησιμοποιείται τόσο για τα αόριστα όσο και για τα ορισμένα ολοκληρώματα. Πιο κάτω η περιγραφή της:

```
In[144]:=?Integrate
```

Integrate[f, x] gives the indefinite integral of f with respect to x.
Integrate[f, {x, xmin, xmax}] gives the definite integral .
Integrate[f, {x, xmin,xmax}, {y,ymin, ymax}] gives a multiple definite integral of f with respect to x and y.

{Η Integrate[f, x] δίνει το αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς x. Η Integrate[f, {x, xmin, xmax}] δίνει το ορισμένο ολοκλήρωμα. Η Integrate[f, {x, xmin,xmax}, {y,ymin, ymax}] δίνει ένα πολλαπλό ολοκλήρωμα.}

Σαν παράδειγμα υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$$

```
In[145]:= Clear[x];
          Integrate[x*Cos[x],{x,0,Pi}]

Out[146]= -2
```

Ας βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα του $x^2 sinx$

```
In[147]:= Clear[x];
          Integrate[x^2*Sin[x],x]
```

Out[148]= 2Cos[x]–x^2Cos[x]+2xSin[x]

Σημειώστε ότι το *Mathematica* δεν περιλαμβάνει αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης.
Το τελευταίο παράδειγμα είναι το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{2}\left[\int_{x}^{x^2} xy^2 dy\right]dx$$

```
In[149]:= Clear[x,y];
     Integrate[Integrate[x*y^2,{y,x,x^2}],{x,-1,2}]
```

Out[150]= $\frac{337}{40}$

1.4 Διαγράμματα στο *Mathematica*

Ένα από τα πιο εντυπωσιακά χαρακτηριστικά της *Mathematica* είναι οι γραφικές του ικανότητες. Μπορεί να καταγράψει σε γράφημα διάφορες συναρτήσεις μιας η δυο μεταβλητών ή ακόμα συναρτήσεις που ορίζονται παραμετρικά.

1.4.1 **Plot**

Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μιας μόνο μεταβλητής, $y=f(x)$, σε ένα διάστημα $[a,b]$ χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **Plot.**

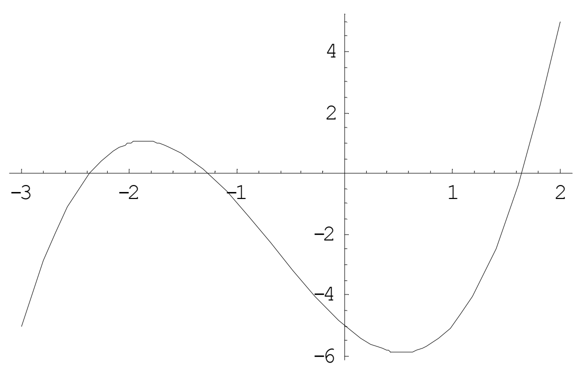
```
In[151]:=?Plot
```

Plot[f, {x, xmin, xmax}] generates a plot of f as a function of x from xmin to xmax. Plot[{f1, f2, ... }, {x, xmin, xmax}] plots several functions fi.

{H Plot[f, {x, xmin, xmax}] παράγει ένα γράφημα της f ως συνάρτηση του x από το xmin μέχρι το xmax. H Plot[{f1, f2, ... }, {x, xmin, xmax}] σχεδιάζει γραφήματα για διάφορες συναρτήσεις.}

Στη πιο βασική της μορφή, το πρώτο όρισμα της **Plot** είναι η συνάρτηση που θα καταγραφεί σε γράφημα και το δεύτερο όρισμα είναι μια λίστα που ορίζει το διάστημα στο οποίο θα σχεδιαστεί η συνάρτηση .Η πιο κάτω μαθηματική έκφραση σχεδιάζει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3+2x^2-3x-5$ στο διάστημα $-3\leq x\leq 2$.

```
In[152]:= Plot[x^3+2*x^2-3*x-5,{x,-3,2}];
```



Η συνάρτηση **Plot** μπορεί να έχει περισσότερα από δυο ορίσματα. Αυτά τα επιπρόσθετα ορίσματα ονομάζονται επιλογές και χρησιμοποιούνται για να εμπλουτίσουν το διάγραμμα. Υπάρχουν διαθέσιμες στο *Mathematica* διάφορες επιλογές για την καταγραφή σχεδίου. Μπορούμε να τις εξετάσουμε χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση **Options** της *Mathematica***.**

```
In[153]:= Options[Plot]
```

Out[153]= {AspectRatio->$\frac{1}{\text{GoldenRatio}}$, Axes->Automatic,

```
AxesLabel -> None, AxesOrigin -> Automatic,
AxesStyle -> Automatic, Background -> Automatic,
ColorOutput -> Automatic, Compiled -> True,
DefaultColor->Automatic, Epilog->{}, Frame->False,
FrameLabel->None, FrameStyle->Automatic,
FrameTicks->Automatic, GridLines->None, MaxBend->10,
PlotDivision->20., PlotLabel->None, PlotPoints->25,
PlotRange->Automatic, PlotRegion->Automatic
PlotStyle->Automatic,Prolog->{}, RotateLabel->True,
Ticks->Automatic, DefaultFont :> $DefaultFont
DisplayFunction :> $DisplayFunction
```

Σημειώστε ότι οι επιλογές είναι υπό τη μορφή κανόνων και αυτοί οι κανόνες αντιπροσωπεύουν τις αρχικές ρυθμίσεις. Πολλοί από αυτούς εξηγούνται από μόνοι τους. Οι αρχικές ρυθμίσεις αυτών των επιλογών επαρκούν για την καταγραφή σε διάγραμμα των περισσοτέρων συναρτήσεων. Μερικές από τις πιο χρήσιμες επιλογές είναι η **AxesLabel** (προσδιορίζει με ετικέτα τον κάθετο και οριζόντιο άξονα), η **AspectRatio** (καθορίζει τις διαστάσεις των αξόνων τον ένα σε σχέση με τον άλλο), η **PlotRange** (καθορίζει το εύρος του κάθετου και του οριζόντιου άξονα), η **PlotStyle** (καθορίζει το στυλ της γραμμής που θα χρησιμοποιηθεί στο σχεδιασμό) και η **PlotLabel** (βάζει τίτλο στο γράφημα). Πιο κάτω οι περιγραφές αυτών των επιλογών:

```
In[154]:=?AxesLabel
```

AxesLabel is an option for graphics functions. With AxesLabel→None no labels are drawn on the axes in the plot. AxesLabel→label specifies a label for the y axis of a two-dimensional plot, and the z axis of a three-dimensional plot. AxesLabel→{xlabel,ylabel,…} specifies labels for different axes.

{Η AxesLabel είναι μια επιλογή για συναρτήσεις γραφημάτων. Με τη AxesLabel→None δεν σχεδιάζονται ετικέτες στους άξονες πάνω στο γράφημα. Με τη AxesLabel→label καθορίζεται μια ετικέτα για τον άξονα y σε ένα γράφημα δυο διαστάσεων και για τον z άξονα σε ένα γράφημα τριών διαστάσεων. Η AxesLabel→{xlabel,ylabel,…} καθορίζει ετικέτες για διάφορους άξονες.}

```
In[155]:=?AspectRatio
```

H AspectRatio is an option for Show and related functions. With AspectRatio→Automatic, the ratio of height to width of the plot is determined from actual coordinate values in the plot. H AspectRatio→r makes the ratio equal to r.

{Η AspectRatio είναι μια επιλογή για τη προβολή συσχετιζόμενων συναρτήσεων. Με την AspectRatio→Automatic ο λόγος του ύψους προς το πλάτος του γραφήματος καθορίζεται από τις τιμές των ακριβών ζευγών συντεταγμένων στο γράφημα. Η AspectRatio→r κάνει το λόγο ίσο με το r.}

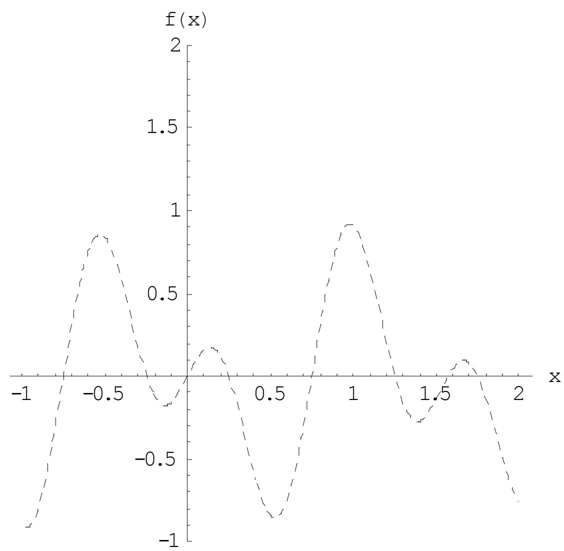
```
In[156]:= ?PlotStyle
```

PlotStyle is an option for Plot, ParametricPlot and ListPlot. PlotStyle→style specifies that all lines or points are to be generated with the specified graphics directive, or list of graphics directives. PlotStyle→{{style1},{style2},…} specifies the successive lines generated should use graphics directives style1,style2,… .

{Η PlotStyle είναι μια επιλογή για το Plot , το ParametricPlot, και ListPlot. Η PlotStyle→style καθορίζει ότι όλες οι γραμμές και τα σημεία θα δημιουργηθούν από συγκεκριμένες κατευθυντήριες οδηγίες των γραφημάτων ή λίστα από αυτές. Η PlotStyle→{{style1},{style2},…} καθορίζει ότι οι διαδοχικές γραμμές που παράγονται θα πρέπει να χρησιμοποιούν κατευθυντήριες οδηγίες όπως η style1,style2,… .}

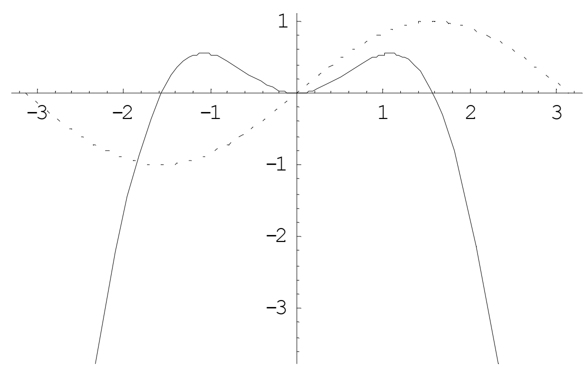
Σαν παράδειγμα ας σχεδιάσουμε τη συνάρτηση y=sin(2x)cos(2πx) πάνω στο διάστημα -1≤x≤2 χρησιμοποιώντας διάφορες επιλογές.

```
In[157]:=
     Plot[Sin[2*x]*Cos[2*Pi*x],{x,-1,2},
     AxesLabel->{"x","f(x)"},PlotRange->{-1,2},
     AspectRatio->Automatic,
     PlotStyle->Dashing[{0.015}]];
```



Στην πιο πάνω παράσταση ενώσαμε τη δεύτερη, τρίτη και τέταρτη γραμμή της έκφρασης Plot. Όταν μια απλή έκφραση του *Mathematica* εκτείνεται πέρα από μόνο μια γραμμή θα ενώσουμε την αρχή κάθε γραμμής πέρα από την πρώτη γραμμή για να δείξουμε αυτή την περίπτωση. Είναι πιθανόν να κάνουμε το διάγραμμα σε δυο ή περισσότερες συναρτήσεις στο ίδιο σετ αξόνων. Για να σχεδιαστούν οι συναρτήσεις πρέπει να ομαδοποιηθούν σε λίστα *{f1,f2,…}*. Κάθε συνάρτηση μπορεί να έχει διαφορετικό **PlotStyle.** Αυτό επιτυγχάνεται με το εισάγουμε την επιλογή **PlotStyle→***{plotsty1, plotsty2,..}*. Το ακόλουθο παράδειγμα κάνει το διάγραμμα δυο συναρτήσεων της $x^2 cosx$ και *sinx* στο διάστημα $-\pi \le x \le \pi$ με το πρώτο γράφημα να χρησιμοποιεί συνεχόμενη γραμμή και το δεύτερο διακεκομμένη. Η συνεχόμενη γραμμή δηλώνεται ως άδεια λίστα.

```
In[158]:= Plot[{x^2*Cos[x],Sin[x]},{x,-Pi,Pi},
        PlotStyle->{{},Dashing[{0.005,0.02}]}];
```



1.4.2 **Plot3D**

Με τη συνάρτηση **Plot3D** σχεδιάζονται συναρτήσεις δυο μεταβλητών. Η συνάρτηση **Plot3D** είναι πολύ παρόμοια με τη συνάρτηση **Plot.**

```
In[159]:=?Plot3D
```

Plot3D[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}] generates a three-dimensional plot of f as a function of x and y. Plot3D[{f, s}, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}] generates a three-dimensional plot in which the height of the surface is specified by f, and the shading is specified by s.

{H Plot3D[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}] παράγει ένα γράφημα τριών διαστάσεων εν συναρτήσει του x και y. H Plot3D[{f, s}, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}] παράγει ένα γράφημα τριών διαστάσεων όπου το ύψος και η σκίαση καθορίζεται από το s.}

Μερικές επιλογές είναι διαφορετικές γιατί το γράφημα θα είναι σε χώρο τριών διαστάσεων. Πιο κάτω τα χαρακτηριστικά της **Plot3D**

```
In[160]:= Options[Plot3D]

Out[160]=
   {AmbientLight->GrayLevel[0],AspectRatio-> Automatic,
```

```
Axes->True, AxesEdge->Automatic, AxesLabel-> None,
AxesStyle->Automatic,Background->Automatic,Boxed-> True,
BoxRatios -> {1, 1, 0.4}, BoxStyle -> Automatic,
  ClipFill -> Automatic, ColorFunction -> Automatic,
  ColorOutput -> Automatic, Compiled -> True
  DefaultColor->Automatic,Epilog->{}, FaceGrids->None,
  HiddenSurface -> True , Lighting -> True,
  ColorFunctionScaling -> True,  ImageSize -> Automatic,
  LightSources ->
   {{{1., 0., 1.}, RGBColor[1, 0, 0]},
   {{1., 1., 1.}, RGBColor[0, 1, 0]},
   {{0., 1., 1.}, RGBColor[0, 0, 1]}}, Mesh -> True,
  MeshStyle->Automatic,PlotLabel->None,PlotPoints->15,
  PlotRange -> Automatic, PlotRegion -> Automatic,
  Plot3Matrix->Automatic, Prolog->{}, Shading->True,
  SphericalRegion -> False, Ticks -> Automatic,
  ViewCenter -> Automatic, ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.},
  ViewVertical->{0.,0.,1.}, DefaultFont :> $DefaultFont,
  DisplayFunction :> $DisplayFunction
```

Μερικές από αυτές τις επιλογές χρειάζονται κάποια επεξήγηση. Για παράδειγμα ας ελέγξουμε το νόημα των επιλογών **BoxRatios** και **ViewPoint.**

```
In[161]:=?BoxRatios
```

BoxRatios is an option for Graphics3D and SurfaceGraphics. BoxRatios→{rx,ry,rz} gives the ratios of side lengths for the bounding box of the three-dimensional picture. BoxRatios→Automatic determines the ratios using the range of actual coordinate values in the plot.

{Η BoxRatios είναι μια επιλογή για την Graphics3D και τη SurfaceGraphics. Η BoxRatios→{rx,ry,rz} δίνει το λόγο του μήκους των πλευρών του περικλειόμενου τετράγωνου σε εικόνα τριών διαστάσεων. Η BoxRatios→Automatic καθορίζει τους λόγους χρησιμοποιώντας το εύρος των ακριβών συντεταγμένων στο διάγραμμα.}

```
In[162]:=?ViewPoint
```

ViewPoint is an option for Graphics3D and SurfaceGraphics which gives the point in space from which the objects plotted are to be viewed. ViewPoint→{x,y,z} gives the position of the view point relative to the center of the three-dimensional box that contains the object being plotted.

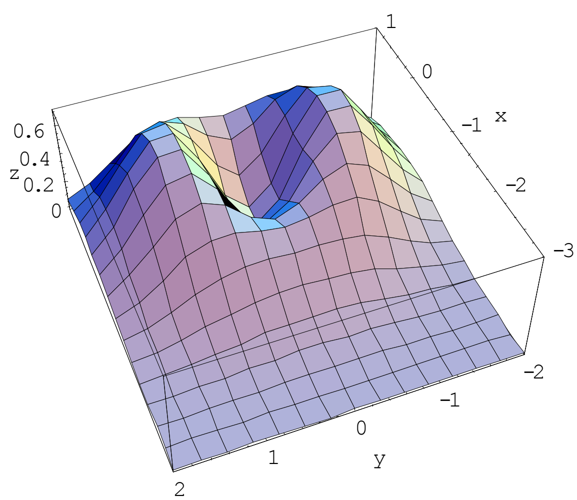
{Η ViewPoint είναι μια επιλογή για την Graphics3D και τη SurfaceGraphics που δίνει το σημείο στο χώρο όπου θα σχεδιαστούν τα αντικείμενα στο γράφημα. Η ViewPoint→{x,y,z} δίνει τη θέση του σημείου προβολής όσο αφορά

το κέντρο του τετραγώνου τριών διαστάσεων που περιέχει το αντικείμενο που έχει σχεδιαστεί.}

Για να εξηγήσουμε αυτή τη συνάρτηση σχεδιάζουμε το γράφημα της συνάρτησης f(x,y)= $(x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

Πάνω στο ορθογώνιο -3≤x≤1 και -2≤x≤2

```
In[163]:=
    Plot3D[(x^2+2*y^2)*Exp[-(x^2+y^2)], {x,-3,1},{y,-2,2},
    AxesLabel->{“x”,”y”,”z”},
    ViewPoint->{-2.270, 0.910, 2.580}];
```



1.4.2 ParametricPlot και ParametricPlot3D

Οι παραμετρικά ορισμένες συναρτήσεις όπως η *x=f(t), y=g(t), a≤t≤b* δυο διαστάσεων καθώς και οι *x=f(t), y=g(t), z=h(t) , a≤t≤b* τριών διαστάσεων μπορούν να καταγραφούν σε γράφημα με τη βοήθεια των συναρτήσεων **ParametricPlot** και **ParametricPlot3D** αντίστοιχα. Η *Mathematica* παρέχει τις παρακάτω πληροφορίες για τις συναρτήσεις:

```
In[164]:= ?ParametricPlot
```

ParametricPlot[{fx, fy}, {t, tmin, tmax}] produces a parametric plot with x and y coordinates fx and fy generated as a function of t. ParametricPlot[{{fx, fy}, {gx, gy}, ... }, {t, tmin, tmax}] plots several parametric curves.

{Η ParametricPlot[{fx, fy}, {t, tmin, tmax}] παράγει ένα παραμετρικό γράφημα με τα x και y ως ζεύγη συντεταγμένων των fx και fy εν συναρτήσει του

t .H ParametricPlot[{{fx, fy}, {gx, gy}, ... }, {t, tmin, tmax}] σκιαγραφεί διάφορες παραμετρικές καμπύλες.}

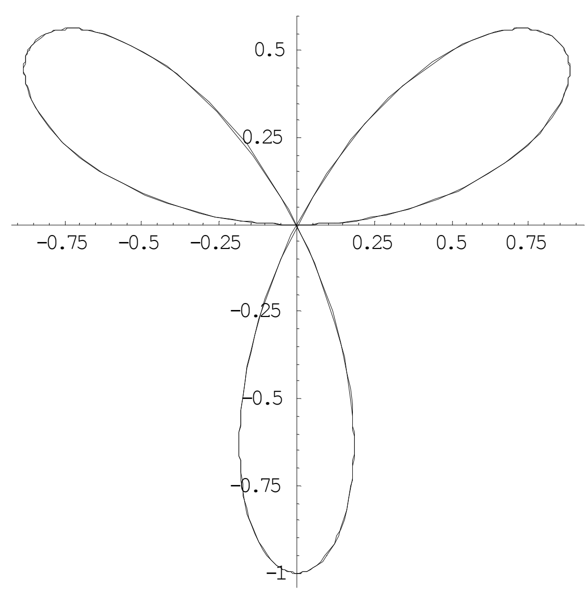
```
In[165]:=?ParametricPlot3D
```

ParametricPlot3D[{fx, fy, fz}, {t, tmin, tmax}] produces a three-dimensional space curve parametrized by a variable t which runs from tmin to tmax. ParametricPlot3D[{fx, fy, fz}, {t, tmin, tmax}, {u, umin, umax}] produces a three-dimensional surface parametrized by t and u. ParametricPlot3D[{fx, fy, fz, s}, ...]shades the plot according to the color specification s. ParametricPlot3D[{{fx, fy, fz}, {gx, gy, gz}, ... }, ...] plots several objects together.

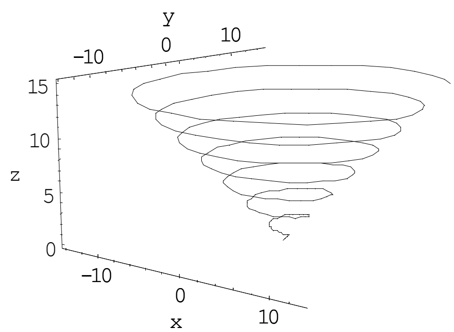
{H ParametricPlot3D[{fx, fy, fz}, {t, tmin, tmax}] παράγει μία καμπύλη τριών διαστάσεων με παράμετρο μια μεταβλητή t με διάστημα tmin≤t≤tmax. H ParametricPlot3D[{fx, fy, fz}, {t, tmin, tmax}, {u, umin, umax}] παράγει μια επιφάνεια τριών διαστάσεων με παραμέτρους τα t και u. H ParametricPlot3D[{fx, fy, fz, s}, ...] σκιάζει το διάγραμμα ανάλογα με το χρώμα που ορίζεται από το s. H ParametricPlot3D[{{fx, fy, fz}, {gx, gy, gz}, ... }, ...] σχεδιάζει διάφορα αντικείμενα μαζί.}

Οι επιλογές(Options) για αυτές τις τρεις συναρτήσεις είναι παρόμοιες με αυτές των **Plot** και **Plot3D**. Πιο κάτω παραθέτουμε τρία παραδείγματα:

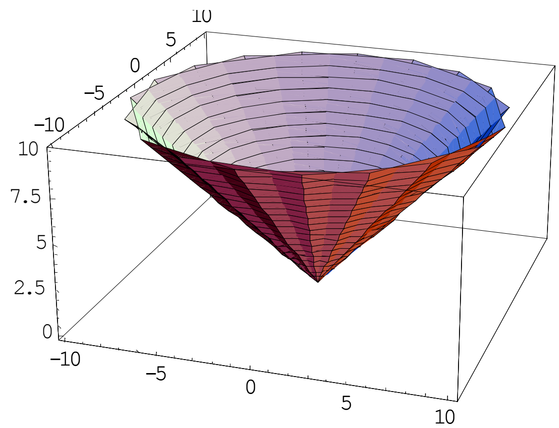
```
In[166]:=ParametricPlot[{Sin[3*t]*Cos[t],Sin[t]*Sin[3*t]},
                            {t,-Pi,Pi},AspectRatio->1];
```



```
In[167]:=ParametricPlot3D[{t*Sin[3*t],t*Cos[3*t],t},{t,0,15},
      PlotPoints->200,ViewPoint->{2.737,-3.416,0.906},
                  Boxed->False,AxesLabel->{"x","y","z"}];
```




```
In[168]:=ParametricPlot3D[{t*Cos[u],t*Sin[u],t},{t,0,10},
      {u,-2Pi,2Pi},ViewPoint->{1.368,-4.101,1.712}];
```



1.4.4 **Contour Plot**

Η συνάρτηση **Contour Plot** παράγει ένα χάρτη σε ισοϋψείς γραμμές σε μια επιφάνεια που ορίζεται από μια εξίσωση *z=f(x,y)* για διάφορες τιμές *z.* Παρακάτω οι πληροφορίες του *Mathematica* για τη συνάρτηση **Contour Plot:**

```
In[169]:=?ContourPlot
```

ContourPlot[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}] generates a contour plot of f as a function of x and y.

{Η ContourPlot[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}] παράγει ένα σχέδιο σε περίγραμμα της f εν συναρτήσει των x και y }.

Η συνάρτηση έχει και διάφορες επιλογές

```
In[170]:=Options[ContourPlot]

Out[170]={AspectRatio->1,Axes->False,AxesLabel-> None,
     AxesOrigin->Automatic, AxesStyle->Automatic,
 Background->Automatic,ColorFunction->Automatic,
 ColorOutput -> Automatic,  Compiled -> True,
 ContourLines->True,Contours->10,ContourShading->True
 ContourSmoothing-> True, ContourStyle -> Automatic,
 DefaultColor->Automatic, Epilog->{}, Frame->True,
 FrameLabel -> None, FrameStyle -> Automatic,
 FrameTicks->Automatic,PlotLabel->None,PlotPoints->15,
 PlotRange->Automatic,PlotRegion->Automatic,Prolog-> {},
 RotateLabel-> True, Ticks -> Automatic,
 DefaultFont :> $DefaultFont,
 DisplayFunction :> $DisplayFunction,
```

Ας δούμε τώρα τις **Contours** και **ContourShading**

```
In[171]:=?Contours
```

Contours is an option for ContourGraphics specifying the contours to use. Contours→n chooses n equally spaced contours between the minimum and maximum z values. Contours→{z1,z2,…} specifies the explicit z values to use for contours.

{H Contours είναι μια επιλογή της ContourGraphics που καθορίζει το περίγραμμα που θα χρησιμοποιηθεί. H Contours→n επιλέγει n περιγράμματα ίσα μεταξύ τους ,σε διάστημα της ελάχιστης και μέγιστης τιμής που μπορεί να πάρει η z. H Contours→{z1,z2,…} καθορίζει τις σαφείς τιμές του z που θα χρησιμοποιηθούν στο περίγραμμα.}

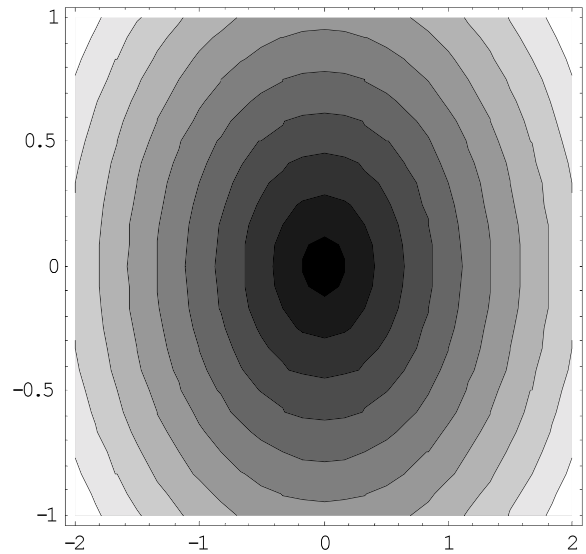
```
In[172]:=?ContourShading
```

ContourShading is an option for plots. With ContourShading→False, regions between contour lines are left blank. With ContourShading→True, regions are colored based on the setting for the option ColorFunction.

{H ContourShading είναι μια επιλογή για σχέδια σε περίγραμμα . Με τη ContourShading→False περιοχές μεταξύ των γραμμών του περιγράμματος μένουν κενές. Με τη ContourShading→True οι περιοχές είναι χρωματισμένες με το χρώμα που βρίσκεται στην επιλογή ColorFunction.}

Ως παράδειγμα ας κάνουμε το γράφημα του περιγράμματος της f(x,y)=$\sqrt{x^2+2y^2}$ Το περίγραμμα είναι γραμμο-σκιασμένο από το *Mathematica* με τέτοιο τρόπο ώστε οι περιοχές με μεγαλύτερες τιμές από το *z* να είναι λιγότερο γραμμο-σκιασμένες από αυτές που έχουν μικρότερες τιμές από το *z*.

```
In[173]:=Clear[f,x,y];
       f[x_,y_]:= Sqrt[x^2+ 2*y^2];
       ContourPlot[f[x,y],{x,-2,2},{y,-1,1},
        PlotPoints->25];
```



1.4.5 Πρωταρχικά γραφημάτων και η συνάρτηση **Show**

Τα γραφικά στη *Mathematica* γίνονται σύμφωνα με κάποια πρωταρχικά. Σε δυο διαστάσεις τα γραφήματα κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας κάποια βασικά αντικείμενα για το σχεδιασμό τους όπως σημεία, γραμμές, πολύγωνα, κύκλους και κείμενο. Αυτά σχεδιάζονται με τη βοήθεια των συναρτήσεων του *Mathematica* **Point, Line, Polygon, Circle** και **Text.** Πιο κάτω οι περιγραφές τους

```
In[176]:=?Point
```

Point[coords] is a graphics primitive that represents a point.

{Η Point[coords] είναι ένα πρωταρχικό ενός γραφήματος και υποδηλώνει ένα σημείο.}

```
In[177]:=?Line
```

Line[{pt1, pt2, ... }] is a graphics πρωταρχικό which represents a line joining a sequence of points.

{Το Line[{pt1, pt2, ... }] είναι ένα πρωταρχικό ενός γραφήματος και συμβολίζει μια γραμμή από διαδοχικά σημεία.}

```
In[178]:=?Polygon
```

Polygon[{pt1, pt2, ... }] is a graphics primitive that represents a filled polygon.

{Το Polygon[{pt1, pt2, ... }] είναι ένα πρωταρχικό γραφήματος που συμβολίζει ένα γεμάτο πολύγωνο.}

```
In[179]:=?Circle
```

Circle[{x, y}, r] is a two-dimensional graphics primitive that represents a circle of radius r centered at the point x, y. Circle[{x, y}, {rx, ry}] yields an ellipse with semi-axes rx and ry. Circle[{x, y}, r, {theta1, theta2}] represents a circular arc.

{Το Circle[{x, y}, r] είναι ένα πρωταρχικό γραφήματος δυο διαστάσεων που αναπαριστά ένα κύκλο με ακτίνα r και με κέντρο το σημείο {x,y}. Το Circle[{x, y}, {rx, ry}] συμβολίζει μια έλλειψη με ημιάξονες rx και ry. Το Circle[{x, y}, r, {theta1, theta2}] συμβολίζει ένα κυκλικό τόξο.}

```
In[180]:=?Text
```

Text[expr, coords] is a graphics primitive that represents text corresponding to the printed form of expr, centered at the point specified by coords.

{Το Text[expr, coords] είναι ένα πρωταρχικό γραφήματος που συμβολίζει κείμενο το οποίο είναι τυπωμένο σε μορφή expr και στοιχισμένο στο κέντρο του σημείου που καθορίζεται από το coords.}

Υπάρχουν και μερικές ψευδοεντολές στα γραφήματα που καθορίζουν τον τρόπο που σχεδιάζονται τα αντικείμενα στα γραφήματα. Αυτές είναι: **Thickness, RGBColor, PointSize,Dashing** κ.τ.λ.

```
In[181]:=?Thickness
```

Thickness[r] is a graphics directive which specifies that lines which follow are to be drawn with a thickness r. The thickness r is given as a fraction of the total width of the graph.

{H Thickness[r] είναι μια ψευδοεντολή γραφήματος που καθορίζει ότι οι γραμμές που ακολουθούν θα πρέπει να είναι σχεδιασμένες με πάχος r. Το πάχος r δίνεται από το κλάσμα του ολικού πλάτους γραφήματος.}

```
In[181]:= ?RGBColor
```

RGBColor[red, green, blue] is a graphics directive which specifies that graphical objects which follow are to be displayed, if possible, in the color given.

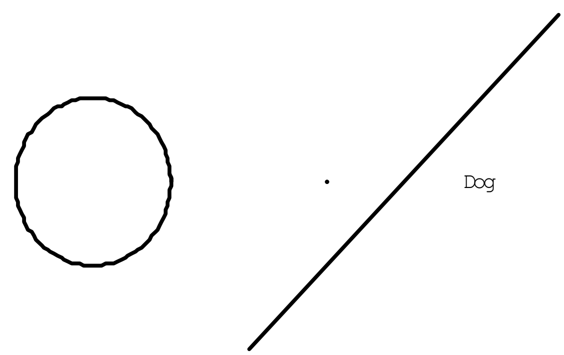
{Η RGBColor[red, green, blue] είναι μια ψευδοεντολή γραφήματος που καθορίζει το χρώμα με το οποίο θα σχεδιαστεί το γράφημα.}

Τα χαρακτηριστικά και οι εντολές των γραφημάτων συναρμολογούνται από μια άλλη συνάρτηση του *Mathematica.* Σε δυο διαστάσεων γραφήματα χρησιμοποιείται η **Graphics** και σε τριών διαστάσεων η **Graphics3D**. Ως παράδειγμα κατασκευάζουμε ένα γράφημα δυο-διαστάσεων που περιέχει το σημείο (1/4 ,1/2), μια γραμμή με πάχος μεταξύ των σημείων (0,0) και (1,1) ένα κύκλο με ακτίνα ¼ που βρίσκεται που βρίσκεται στο σημείο (-1/2 ,1/2) και το κείμενο «Dog» στοιχισμένο στο σημείο (3/4 ,1/2).

```
In[183]:=
 picture=Graphics[{Point[{1/4,1/2}], Thickness [0.01],
                   Line [{0,0}, {1,1}],
                   Circle[{-1/2,1/2},1/4],
                   Text[“Dog”,{3/4,1/2}]}];
```

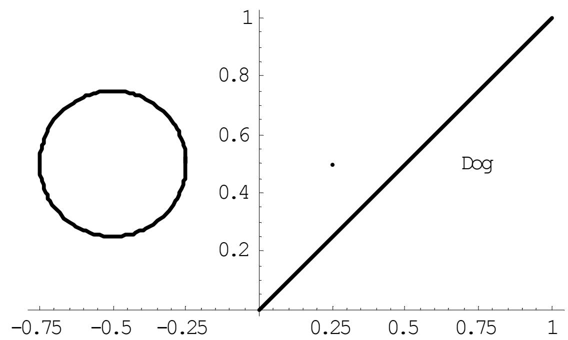
Η **Graphics** κατασκευάζει τα γραφήματα που ονομάζονται **picture** αλλά δεν το δείχνει. Για να το παρουσιάσει η *Mathematica* χρησιμοποιεί τη συνάρτηση **Show**

```
In[184]:= Show[picture];
```



Προσέξτε ότι η ψευδοεντολή **Thickness[0.01]** επιδρά τόσο για τη γραμμή όσο και για τον κύκλο. Η συνάρτηση **Show** έχει διάφορες επιλογές. Θα παρουσιάσουμε το πιο πάνω γράφημα χρησιμοποιώντας δυο από αυτές τις επιλογές.

```
In[185]:=Show[picture,Axes->True,AspectRatio->Automatic];
```



Οι επιλογές μπορούν να τοποθετηθούν στις συναρτήσεις Graphics και Graphics3D. Για παράδειγμα πιο κάτω παραθέτονται οι επιλογές της Graphics.

```
In[186]:= Options[Graphics]
```

$$\text{Out[186]= \{AspectRatio -> } \frac{1}{\text{GoldenRatio}}\text{, Axes -> False,}$$

```
AxesOrigin -> Automatic, AxesStyle -> Automatic,
Background -> Automatic, ColorOutput -> Automatic,
DefaultColor->Automatic, Epilog->{}, Frame->False,
FrameLabel -> None,  FrameStyle -> Automatic,
FrameTicks->Automatic,GridLines->None,PlotLabel->None,
PlotRange->Automatic,PlotRegion->Automatic,Prolog->{},
RotateLabel -> True, Ticks -> Automatic,
DefaultFont :> $DefaultFont,
DisplayFunction :> $DisplayFunction.
```

1.5 Υποσύνολα και Πακέτα Εντολών

Συχνά θέλουμε να ομαδοποιήσουμε ένα αριθμό από μαθηματικές εκφράσεις της *Mathematica* για να εκτελέσουν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Ένας εύκολος τρόπος για να το επιτύχουμε είναι να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση **Module.** Πιο κάτω βρίσκεται η περιγραφή:

```
In[187]:= ?Module
```

Module[{x, y, ... }, expr] specifies that occurrences of the symbols x, y, ... in expr should be treated as local. Module[{x = x0, ... },expr] defines initial values for x, ...

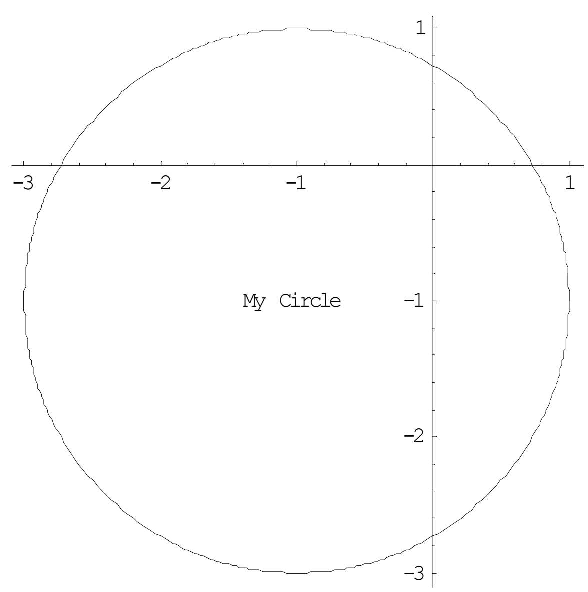
**{H Module[{x, y, ... }, expr] καθορίζει ότι οι εμφανίσεις των συμβόλων x,y στην expr πρέπει να χρησιμοποιηθούν ως τοπικές.
H Module[{x = x0, ... },expr] ορίζει αρχικές αξίες για το x,…}.**

Το πρώτο όρισμα της **Module** είναι μια λίστα από σύμβολα που χρησιμοποιούνται εσωτερικά στο υποσύνολο. Το δεύτερο όρισμα περιέχει οδηγίες που πρέπει να ακολουθήσει η *Mathematica* μέσα στο υποσύνολο. Συνεπώς ,μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση που απαιτεί διάφορα βήματα. Για παράδειγμα η ακόλουθη συνάρτηση δημιουργεί ένα κύκλο που έχει κέντρο το σημείο (*a,b*) με ακτίνα *R* και έχει μια ετικέτα στο σημείο. Θα ονομάσουμε αυτή τη συνάρτηση **labeledcircle.** Το πρώτο όρισμα **pt** είναι μια λίστα που αναπαριστάνει το σημείο (*a,b*) ,το δεύτερο όρισμα **rad** είναι η ακτίνα *R* και το τρίτο όρισμα **label** είναι μια ετικέτα.

```
In[188]:=
     Clear[labelcircle,pt];
     labelcircle[pt_,rad_,label_]:=
     Module[{round_txt},round=Circle[pt,rad];
     Txt=Text[label,pt];
     Graphics[{round,txt}]]
```

Συμπερασματικά ,η ακόλουθη παράσταση δημιουργεί ένα γραφικό αντικείμενο που ονομάζεται **picture** ,το οποίο είναι ένας κύκλος με κέντρο {-1,1} με ακτίνα 2 και ετικέτα «My circle». Για την εμφάνιση του αποτελέσματος αυτής της συνάρτησης, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση **Show** με μερικές επιλογές.

```
In[190]:=
     Picture = labelcircle[{-1,-1},2,"My Circle"];
     Show[picture,AspectRatio->Automatic,Axes->True];
```



Η Mathematica έχει αρκετά εξειδικευμένα πακέτα που μπορεί να διαβάσει ο χρήστης στο kernel. Για παράδειγμα η κανονική και άλλες συνεχείς κατανομές πιθανοτήτων περιέχονται στο πακέτο **Statistics Continuous Distribution**. Ας φορτώσουμε πρώτα το πακέτο στο kernel.

```
In[195]:=
     Needs[“Statistics´ContinuousDistributions´”]
```

Εκτιμούμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας **PDF** της μεταβλητής *x* έχοντας τη κανονική κατανομή με μέσο 0 και μονάδα τυπικής απόκλισης **NormalDistribution[0,1].**

```
In[196]:=
     normal=PDF[NormalDistribution[0,1],x]
```

Out[196]= $\dfrac{1}{E^{x^2/2}\, Sqrt[2Pi]}$

Η πιθανότητα συνάρτησης πυκνότητας σχεδιάζεται για $-3 \le x \le 3$

```
In[197]:=
     Plot[normal,{x,-3,3},AxesLabel->{“x”,”f(x)”}];
```