

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

12^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαια 2, 3)
[Κεφάλαια 1, 2 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]

Θέμα Α

A1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^k$, $x \in A$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο A στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $k \in \mathbb{Z}$ με $k < 0$ και $A = \mathbb{R}^*$. (Μονάδες 3)

(β) $k \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ και $A = (0, +\infty)$ (Μονάδες 4)

Μονάδες 7

A2. Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής.

Μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Εάν ισχύει $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ με $l_1 \neq l_2$, τότε πάντα ισχύει $l_1 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq l_2$ »

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για $\alpha > 1$ η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και η παράγωγός της είναι ίση με το 0.

β) Δεν υπάρχουν συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει

$$f \circ g = g \circ f$$

γ) Εάν η συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα Δ τότε καθώς το x αυξάνεται, η εφαπτομένη της C_f στρέφεται κατά τη αρνητική φορά.

δ) Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f «διαπερνά» την καμπύλη.

ε) Αν μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A είναι περιττή, τότε για τη μελέτη της μπορούμε, λόγω συμμετρίας, να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της.

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (4 μονάδες) καθώς και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης (μονάδες 2)

Μονάδες 6

B3. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα B1, B2 να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

B4. Αν $g(x) = |x - 1|$, να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ (μονάδες 3) και να εξετάσετε εάν η συνάρτηση

$\varphi(x) = \begin{cases} (f \circ g)(x), & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ (μονάδες 3)

Μονάδες 6

B5. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} x^{f(x)}, & x \in (0,1) \cup (1, +\infty) \\ e, & x = 1 \end{cases}$$

είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 4

Θέμα Γ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση με $f(0) = 0$ και για την οποία ισχύει $f'(x)(e^{f(x)} - x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της στο σημείο $O(0, f(0))$.

Μονάδες 3

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = (e^{f(x)} - x)^2 - x^2$$

είναι σταθερή στο \mathbb{R} (μονάδες 4) και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f (μονάδες 4)

Μονάδες 8

Δίνεται ότι $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Μονάδες 5

Γ4. Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα τη συνάρτηση f .

Μονάδες 3

Γ5. Δίνεται ότι $f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) \geq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. (μονάδες 3)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} στο $[0, +\infty)$. (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2 \ln x + x \ln x + \frac{1}{x} + 2, \quad x > 0$$

Δ1. Να δείξετε ότι είναι κυρτή (μονάδα 1) και ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ (μονάδες 5) για το οποίο ισχύει (μονάδες 2):

$$f(x_0) = \frac{-x_0^3 - 2x_0^2 - 2x_0 + 2}{x_0^2}$$

Μονάδες 8

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση

$$g(x) = xe^x \ln x, \quad x > 0$$

Να δείξετε ότι:

Δ2. Η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7

Δ3. Ισχύει

$$6(g(3) - g(2)) < 2(g(5) - g(2)) < 3(g(5) - g(3))$$

Μονάδες 5

Δ4. Ισχύει $\frac{g(x)}{x} \geq x^2 - 1$ για κάθε $x \geq 1$.

Μονάδες 5

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών.

Το διαγώνισμα επιμελήθηκε ο Αλέξανδρος Συγκελάκης, Μαθηματικός του Πρότυπου Γενικού Λυκείου Ηρακλείου.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντίνο Κωνσταντόπουλο και Βασίλειο Μοτσάκο.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ