$\forall \boldsymbol{fter - maths}$

Μάρκος Βασίλης Αθηνα 2020

Πρόχειρες Σημειώσεις

Γ′ Λυκείου: Συναρτήσεις, Όρια, Συνέχεια

Περιεχόμενα

[2]Μονοκοντυλιά σημαίνει ότι μπορούμε να ξεκινήσουμε να σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση και να την ολοκληρώσουμε χωρίς να χρειαστεί να σηκώσουμε το μολύβι μας από το χαρτί.

Αντί προλόγου

Ποτέ δεν κατάλαβα γιατί αποκαλούμε «αντί προλόγου» το εισαγωγικό σημειωμα ενός βιβλίου και τελικά καταλήγουμε να γράφουμε έναν τυπικό πρόλογο για αυτό, αλλά, αφού το κάνουν όλοι, ποιος είμαι εγώ να πάω κόντρα; Λοιπον, σε αυτόν τον «αντιπρόλογο», θα εξηγήσουμε γιατί και πώς έχετε καταλήξει να κρατάτε αυτό εδώ το έντυπο στα χέρια σας.

Αρχικά, το πιο πιθανό είναι να μην κρατάτε το ίδιο το έγγραφο στα χέρια σας, μιας και ο κύριος τρόπος διάθεσης αυτού του υλικού είναι σε ηλεκτρονική μορφή (δε μας φταίνε κάτι τα δέντρα στον Αμαζόνιο). Όπως και να έχει, τι είναι αυτό που πρόκειται, καλώς εχόντων των πραγμάτων, να διαβάσετε; Όπως λέει και στο εξώφυλλο, στις επόμενες σελίδες θα βρείτε «Πρόχειρες σημειώσεις» ενώ λίγο παρακάτω βλέπετε ότι θα μας απασχολήσουν οι ενότητες των συναρτήσεων, των ορίων και της συνέχειας από τα μαθηματικά προσανατολισμού της τρίτης λυκείου. Οι σημειώσεις βασίζονται, κατά κύριο λόγο, στην ύλη του σχολικού βιβλίου, με αρκετές, βεβαίως, προσθήκες και «παρεκβάσεις» όπου αυτό κρίθηκε αναγκαίο, αλλά και με αρκετά περισσότερα παραδείγματα και σχήματα. Σε ό,τι έχει να κάνει με τις ασκήσεις, αυτές «πατάνε» πάνω στην ύλη όπως αυτή αναπτύσσεται στις επόμενες ενότητες των σημειώσεων, χωρίς όμως να περιορίζονται σε αυτήν.

Αυτό που σίγουρα δεν είναι αυτές οι σημειώσεις είναι ένα υποκατάστατο του σχολικού βιβλίου, ειδικά για όσους[3] διαβάζουν για να συμμετέχουν στις πανελλήνιες εξετάσεις. Ο ρόλος τους είναι συμπληρωματικός και υποστηρικτικός, έτσι ώστε να βοηθήσουν στην βαθύτερη κατανόηση της ύλης που μελετάται σε αυτήν την τάξη και να παρέχουν υλικό προς εξάσκηση. Αυτή ακριβώς η φύση τους, καθορίζει και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί κανείς να μελετά αυτό το υλικό. Ξεκινώντας από τις σημειώσεις και τις έννοιες που εξετάζονται, μπορεί κανείς, να προχωρά στην επίλυση κάποιων σχετικών ασκήσεων από το τελευταίο μέρος του κεφαλαίου, έπειτα να συνεχίζει τη μελέτη της ύλης από το μέρος των σημειώσεων, να επιλύει κάποιες σχετικές ασκήσεις και να συνεχίζει με αυτόν τον τρόπο.

Ειδικότερα, σε αυτό το κεφάλαιο καλύπτεται το πρώτο μέρος της ύλης που αφορά τις βασικές έννοιες των συναρτήσεων (ορισμός, πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, γραφική παράσταση, μονοτονια, ακρότατα, «1-1», αντίστροφη συνάρτηση), των ορίων (ένας «χαλαρός» ορισμός, ιδιότητες/άλγεβρα των ορίων, βασικά αποτελέσματα για τα όρια και τεχνικές υπολογισμού ορίων) και της συνέχειας (ορισμός, βασικές ιδιότητες και βασικά αποτελέσματα για συνεχείς συναρτήσεις). Έχει γίνει προσπαθεια να περιέχονται όσο το δυνατόν περισσότερες αποδείξεις των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται, ακόμα και αν αυτές δεν εμπίπτουν στην εξεταστέα ύλη, για να έχει τη δυνατότητα όποιος ενδιαφέρεται να τις μελετήσει. Επίσης, για την ευκολότερη κατάτμηση της παρουσιαζόμενης ύλης, συμπληρωματικά μπορεί κανείς να συμβουλεύεται και τις διαφάνειες των μαθημάτων που αντιστοιχούν στην εν λόγω ύλη, οι οποίες βρίσκονται αναρτημένες στον ιστότοπο https://aftermathsgr.wordpress.com/ (στην ενότητα του διδακτικού υλικού), καθώς και στην αντίστοιχη σελίδα στο Slideshare.

Τέλος, το παρόν[4] αποτελεί την ασπρόμαυρη έκδοση των σημειώσεων έτσι ώστε να είναι ευκολότερη — και φθηνότερη — η εκτπύπωσή τους. Τυπώνουμε όμως με μέτρο! Για λάθη, διορθώσεις, παραλείψεις και προτάσεις επικοινωνήστε μαζί μου είτε μέσω e-mail στο `vassileiosmarkos@gmail.com` είτε μέσω της φόρμας επικοινωνίας: **https://aftermathsgr.wordpress.com/contact/**.

Καλό διάβασμα!

---

[3] Σε όσα σημεία αναγράφεται «όποιος» εννοείται «όποιος/α/ο» και αντίστοιχα για άλλες σχετικές λέξεις — π.χ. «κανείς/καμμία/κανένα», «μαθητής/τρια» κ.λπ.

[4] Και το παρελθόν... και το μέλλον...

Μερικά προβλήματα...

Πριν ξεκινήσουμε την παρουσίαση της ύλης, παραθέτουμε μερικά προβλήματα τα οποία είναι και σε μεγάλο βαθμό η αφορμή για να ασχοληθούμε με τα φετινά μαθηματικά.
Πρόβλημα 1. Σας δίνονται 1000 μέτρα συρματοπλέγματος, τέσσερις πάσσαλοι και μία πολύ μεγάλη έκταση. Ο ιδιοκτήτης αυτής της έκτασης σας λέει ότι έχετε μία ευκαιρία να περιφρέξετε μία περιοχή σχήματος ορθογωνίου με όποιον τρόπο θέλετε και να πάρετε την έκταση που θα περιφράξετε. Θεωρώντας ότι δε θα πληρώνετε Εν.Φ.Ι.Α. για αυτήν την έκταση[5], πώς πρέπει να διατάξετε τους πασσάλλους και το συρματόπλεγμα;
Πρόβλημα 2. Πόσο κάνουν τα ακόλουθα αθροίσματα με άπειρους όρους:

1. $1 + 1 + 1 + \dots,$
2. $0 + 0 + 0 + \dots,$
3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$
4. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$
5. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots;$
6. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots;$

Αν δεν μπορείτε να τα υπολογίσετε ακριβώς, μπορείτε να βρείτε αν είναι πεπερασμένα ή άπειρα;
Πρόβλημα 3. Έχει λύσεις η εξίσωση:

$$x^5 + x + 1 = 0;$$

Αν ναι, πόσες λύσεις έχει;

Γνωρίζουμε πώς να λύνουμε εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού και, μάλιστα, με σχετική άνεση. Υπάρχουν επίσης και τύποι για τις εξισώσεις τρίτου και τετάρτου βαθμού οι οποίοι, βεβαίως, είναι ιδιαίτερα πολύπλοκοι. Τι γίνεται όμως με εξισώσεις πέμπτου ή μεγαλύτερου βαθμού, όπως αυτή εδώ; Για κακή μας τύχη, υπάρχει ένα θεώρημα, των Abel-Ruffini, το οποίο μας λέει ότι για πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 5 δεν μπορούμε να βρούμε τις λύσεις τους, αν υπάρχουν, μέσα από τους συντελεστές της εξίσωσης, όπως κάναμε και για τις εξισώσεις μέχρι και τετάρτου βαθμού. Με άλλα λόγια, το θεώρημα μας λέει ότι δεν υπάρχει *τύπος* για τις λύσεις τέτοιων εξισώσεων. Ωστόσο, πολλές φορές, αν είμαστε «τυχεροί» μπορεί κάποια ρίζα να «φαίνεται», όπως στην εξίσωση:

$$x^5 + x = 0$$

όπου μία προφανής ρίζα είναι το 0 και μάλιστα είναι και μοναδική, αφού:

$$x^5 + x = x(x^4 + 1)$$

και $x^4 + 1 > 0$, άρα, πράγματι, η εξίσωση δεν έχει άλλες λύσεις. Όμως, στην περίπτωση της δοσμένης εξίσωσης, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά...
Πρόβλημα 4. Υπάρχει κλειστό σχήμα το οποίο να έχει εμβαδόν ίσο με $10m^2$ και άπειρη περίμετρο; Αν υπάρχει, μπορείτε να το σχεδιάσετε; Αν όχι, γιατί;
Πρόβλημα 5 «(Αντίστροφο» του προηγούμενου). Υπάρχει κλειστό σχήμα το οποίο να έχει περίμετρο $10m$ και άπειρο εμβαδόν; Αν υπάρχει, μπορείτε να το σχεδιάσετε; Αν όχι, γιατί;

[5]Άρα δεν έχετε λόγο να μην πάρετε τη μεγαλύτερη έκταση που μπορείτε.

Πρόβλημα 6. Είδαμε στα μαθηματικά προσανατολισμού της Β′ Λυκείου ότι το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημείο $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο:

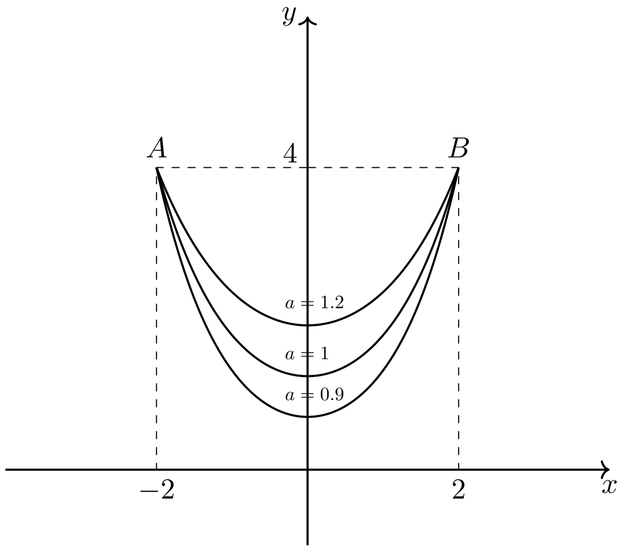
$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Τι γίνεται όμως αν θέλουμε να βρούμε το μήκος μίας τυχούσας καμπύλης που συνδέει δύο σημεία; Για παράδειγμα, ας πάρουμε μία εύκαμπτη αλυσίδα και ας την κρεμάσουμε στα σημεία $A(-2, 4)$ και $B(2, 4)$. Τότε η αλυσίδα θα έχει ένα σχήμα που περιγράφεται ακριβώς από την εξίσωση:

$$y = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

όπου a είναι μία θετική σταθερά που εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά της αλυσίδας (γραμμική μάζα και τάσεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στους «κρίκους» της αλυσίδας). Μπορούμε, λοιπόν, να βρούμε το μήκος της αλυσίδας με μόνο δεδομένο το σχήμα της κρεμασμένης αλυσίδας;

Στο σχήμα 1 φαίνεται η εν λόγω καμπύλη για τρεις διαφορετικές τιμές του $a > 0$.



Σχήμα 1: Τρεις αλυσίδες

Η παραπάνω καμπύλη ονομάζεται ***αλυσοειδές*** *και εμφανίζεται σε πάρα πολλές περιπτώσεις στην καθημερινή ζωή. Για παράδειγμα, τα καλώδια που κρέμονται ανάμεσα στους μεγάλους πυλώνες ηλεκτρισμού έχουν ένα τέτοιο σχήμα, όπως επίσης και η αλυσίδα της άγκυρας που ρίχνει ένα πλοίο στη θάλασσα, όταν η άγκυρα φτάσει στον βυθό. Η ίδια καμπύλη παρουσιάζεται, επίσης, στους ιστούς των αραχνών, σε κρεμαστές γέφυρες και, ανεστραμμένη, σε πολλές εκκλησίες και άλλα κτήρια ιδιαίτερης αρχιτεκτονικής και αισθητικής αξίας.*

Στο εύλογο ερώτημα, γιατί όλα αυτά δε μένουν απλά σε μία ευθεία γραμμή αλλά ακολουθούν τέτοιες καμπύλες, δεν μπορούμε να δώσουμε εύκολα απάντηση, ακόμα και με τα εργαλεία που θα αναπτύξουμε μέσα στη χρονιά. Μία διαισθητική ερμηνεία όμως, είναι η ακόλουθη: Η αλυσίδα «θέλει» να έχει την ελάχιστη ενέργεια στην κατάσταση ισορροπίας της, επομένως πρέπει να βρει τον συνδυασμό που θα ελαχιστοποιεί το άθροισμα της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας λόγω παραμόρφωσης της αλυσίδας. Επομένως, δε γίνεται να έχει μηδενική παραμόρφωση γιατί γίνεται ιδιαίτερα μεγάλη η βαρυτική δυναμική ενέργεια, άρα πρέπει να «λυγίσει» λίγο.

Πρόβλημα 7 (Αστικός σχεδιασμός). Στη βιομηχανική ζώνη μιας πόλης, υπάρχουν δύο εργοστάσια, στις θέσεις A, B, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση 18 χλμ. Το εργοστάσιο A εκπέμπει αέριους ρύπους συγκέντρωσης $80ppm$ ημερησίως, ενώ το εργοστάσιο B συγκέντρωσης[6] $720ppm$

[6] Τα ppm είναι μονάδα μέτρησης της πυκνότητας όταν αναφερόμαστε σε μικροσωματίδια και αντιστοιχεί σε μικροσωμάτια ανά ένα εκατομμύριο (parts per million).

ημερησίως. Θεωρήστε ότι οι ρύποι διαδίδονται ομοιόμορφα στον χώρο γύρω από τα εργοστάσια και ότι οι ρύποι που φτάνουν σε κάθε σημείο έχουν πυκνότητα αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης από το αντίστοιχο εργοστάσιο. Γύρω από το εργοστάσιο A υπάρχει μία περιοχή ακτίνας 1 χλμ στην οποία απαγορεύεται η δόμηση ενώ γύρω από το εργοστάσιο B αυτή η ζώνη έχει ακτίνα 2 χλμ. Αν έχετε την επιλογή να αγοράσετε ένα οικόπεδο για να χτίσετε ένα σπίτι πάνω στον (ευθύγραμμο) δρόμο που συνδέει τα A, B, σε ποιο σημείο θα το χτίζατε; Για ποιον λόγο;

Πρόβλημα 8 (Βήχας)**.** Πόσο γρήγορα «τρέχει» ο αέρας όταν βήχουμε; Αρχικά, ας δούμε πώς λειτουργεί ο μηχανισμός του βήχα στον άνθρωπο. Όταν κάποιος βήχει, συνήθως με σκοπό να διώξει κάτι από την τραχεία έτσι ώστε να μην περάσει στους πνεύμονες ή, εν γένει, να αποβάλλει κάτι από το αναπνευστικό του σύστημα, αυτό που συμβαίνει είναι να στενεύει η τραχεία (η οδός που οδηγεί τον αέρα προς και από τους πνεύμονες) με αποτέλεσμα να αυξάνεται η ταχύτητα του αέρα που διέρχεται από αυτή. Έχει διαπιστωθεί πειραματικά ότι, αν $v(r)$ είναι η ταχύτητα του αέρα που περνά από την τραχεία και r η ακτίνα της τραχείας, τότε ισχύει η σχέση:

$$v(r) = ar^2(r_0 - r)$$

όπου r_0 είναι η φυσιολογική ακτίνα της τραχείας και το a μία θετική σταθερά. Θεωρώντας ότι, προφανώς, το r είναι θετικό και ότι $r \leq r_0$, μιας και η τραχεία δεν μπορεί να διογκωθεί, να βρείτε την ακτίνα που πρέπει να αποκτήσει η τραχεία έτσι ώστε ο αέρας να περνά μέσα από την τραχεία με τη μέγιστη ταχύτητα.

Πρόβλημα 9 (Μέγιστο κέρδος)**.** Ο κύριος Τάδες Δεινόπουλος έχει μία επιχείρηση με φθηνά φωτιστικά. Έχει υπολογίσει ότι όταν παράγει q χιλιάδες φωτιστικά μέσα σε έναν μήνα, τότε αυτά θα πωληθούν σε μία τιμή που δίνεται από τη σχέση:

$$p(q) = 22.2 - 1.2q \text{ € ανά φωτιστικό.}$$

Το συνολικό κόστος παραγωγής αυτών των q χιλιάδων μονάδων δίνεται από τη σχέση:

$$C(q) = 0.4q^2 + 3q + 40 \text{ χιλιάδες €.}$$

Πόσα φωτιστικά πρέπει να παράξει ο κύριος Δεινόπουλος έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει τα έσοδά του; Πόσα πρέπει να παράξει έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το *κέρδος* του; Πόσα πρέπει να παράξει για να ελαχιστοποιήσει το κατά μονάδα κόστος:

$$A(q) = \frac{C(q)}{q};$$

Είναι ίδια αυτά τα τρία νούμερα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Πρόβλημα 10 (Ο κανόνας του Merton)**.** Στο κολλέγιο του Merton της Οξφόρδης, στην Αγγλία, κατά τον $14^{\text{ο}}$ αιώνα, ξεκίνησαν να διαμορφώνονται πολλές από τις ιδέες και τα προβλήματα που θα απασχολούσαν την επιστήμη για τους επόμενους αιώνες. Ένα από αυτά ήταν και η έννοια της *ομαλής κίνησης*. Όριζαν ως ομαλή μία κίνηση αν σε ίσα χρονικά διαστήματα διανύονταν ίσες αποστάσεις, από όπου προκύπτει φυσιολογικά, όπως ξέρουμε από το Γυμνάσιο, ότι η ταχύτητα του κινούμενο σώματος δίνεται από τον τύπο[7]:

$$v = \frac{\text{διανυόμενη απόσταση σε χρόνο } t}{\text{χρόνος } t}.$$

Επίσης, όριζαν, ανάλογα, ως ομαλή *επιτάχυνση* εκείνη για την οποία παρατηρούνταν ίσες μεταβολές της ταχύτητας σε ίσα χρονικά διαστήματα. Σε αυτήν την κίνηση — *την ομαλά επιταχυνόμενη* —

[7]Σε έναν τύπο της μορφής

$$A = \frac{\text{μεταβολή του } \Phi \text{ σε χρόνο } t}{\text{χρόνος } t}$$

το δεξί μέλος ονομάζεται λόγος μεταβολής του Φ ως προς t και το A ονομάζεται *ρυθμός μεταβολής του* Φ.

δεν μπορούσε να οριστεί με βάση τις απλές έννοιες που είχαν στα χέρια τους εκείνη την εποχή η στιγμιαία ταχύτητα του κινούμενο σώματος και, ως εκ τούτου, ήταν πιο δύσκολη η εύρεση της απόστασης που έχει διανύσει σε δεδομένο χρονικό διάστημα ένα σώμα με δεδομένη και σταθερή επιτάχυνση.

Αντ' αυτού, οι ερευνητές του Merton κατέληξαν στο ακόλουθο πολύ βασικό συμπέρασμα:

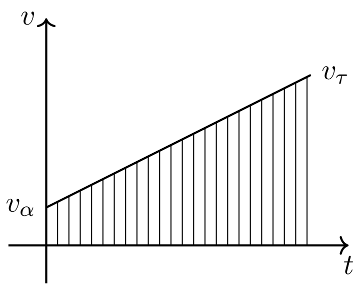
> Αν ένα κινητό έχει ομαλή επιτάχυνση σε δοθέν χρονικό διάστημα τότε η συνολική απόσταση s που διανύει είναι ίση με αυτήν που θα διήνυε στο ίδιο χρονικό διάστημα ένα κινητό που θα εκτελούσε ομαλή κίνηση (στο ίδιο χρονικό διάστημα) με ταχύτητα ίση με τον μέσο όρο της αρχικής ταχύτητας v_α και της τελικής ταχύτητας v_τ.

Σε συμβολική γραφή, αυτό που λέει η παραπάνω διατύπωση, διατηρώντας τον ίδιο συμβολισμό, είναι ότι:

$$s = \frac{v_\alpha + v_\tau}{2} t,$$

αποτέλεσμα που προκύπτει, πράγματι, από τις εξισώσεις της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, όπως γνωρίζουμε.

Λίγα χρόνια αργότερα, ένας Γάλλος μαθηματικός, ο Nicole Oresme, εισάγει στην μελέτη των κινήσεων τη θεμελιώδη έννοια της γραφικής παράστασης ταχύτητας-χρόνου (το γνωστό μας, από το Γυμνάσιο, διάγραμμα $v - t$), με έναν λίγο διαφορετικό τρόπο από αυτόν που το κατασκευάζουμε σήμερα, αλλά με το ίδιο αποτέλεσμα και ερμηνεία. Για την ακρίβεια, ο Oresme φανταζόταν ότι σε κάθε χρονική στιγμή υπήρχε μία γραμμή με μήκος ακριβώς όσο και αυτό της ταχύτητας εκείνη τη στιγμή. Στην περίπτωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, αν κάνει κανείς πολλά «στιγμιότυπα» αυτής της γραμμής, θα δει ότι τα άνω άκρα της σχηματίζουν μία ευθεία όπως και στο συνηθισμένο διάγραμμα $v - t$ (βλ. σχήμα 2).



Σχήμα 2: Η ιδέα της γραφικής παράστασης του Oresme

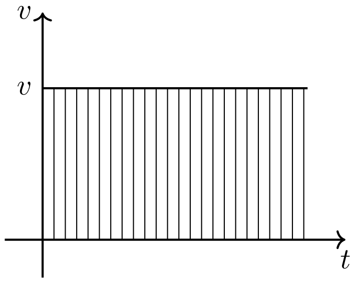
Έπειτα, ο Oresme υπολόγιζε το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση και, χωρίς κάποια περαιτέρω αιτιολόγηση, κατέληγε στο ότι αυτό το εμβαδόν είναι ίσο με την απόσταση που είχε διανύσει το σώμα κατά την κίνησή του. Στην προκειμένη περίπτωση, που το χωρίο κάτω από την καμπύλη έχει σχήμα τραπεζίου, το εμβαδόν του είναι ίσο με:

$$E = \frac{v_\alpha + v_\tau}{2} t$$

που είναι ακριβώς ο τύπος που προκύπτει από τον κανόνα του Merton.

Με τον ίδιο τρόπο, μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει και τον τύπο της ομαλής κίνησης, καθώς το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου σε αυτήν την περίπτωση είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα 3 (η ταχύτητα παραμένει σταθερή, όπως φαίνεται στο σχήμα 3): Σε αυτήν την περίπτωση, το χωρίο κάτω από την καμπύλη είναι ορθογώνιο, οπότε το εμβαδόν του είναι ίσο με:

$$E = vt$$

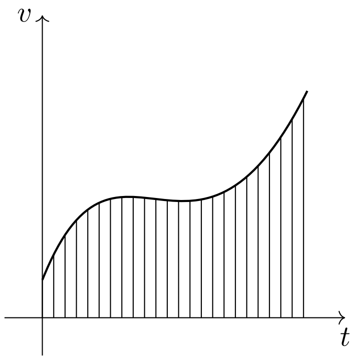


Σχήμα 3: Το διάγραμμα $v - t$ της ομαλής κίνησης

το οποίο συμπίπτει με την απόσταση που διανύει το κινούμενο σώμα σε χρόνο t, όπως είδαμε παραπάνω.

Εδώ προκύπτουν δύο βασικά ερωτήματα:

1. Πώς, ενδεχομένως, σκέφτηκε ο Oresme να συσχετίσει το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $v - t$ με την απόσταση που διανύει το σώμα;
2. Ισχύει αυτό και σε άλλες, μη «ομαλές» κινήσεις; Αν ισχύει, τότε πώς θα υπολογίζαμε την απόσταση που διανύει ένα σώμα του οποίου η ταχύτητα μεταβάλλεται σε σχέση με τον χρόνο όπως στο σχήμα 4;



Σχήμα 4: Μία μη «ομαλή» κίνηση

Πρόβλημα 11. *Τα παρακάτω αποτελούν προϊόν μυθοπλασίας και ουδεμία σχέση έχουν με την πραγματικότητα. Η μόνη αλήθεια είναι τα μαθηματικά.*

Καλοκαίρι, απόγευμα, ο ήλιος όλη μέρα ζεμάταγε, η θάλασσα έβραζε και έχουμε μαζέψει όση ακτινοβολία UV εκπέμπει ο ήλιος σε έναν χρόνο, οπότε αποφασίζουμε να πάμε σε ένα ήσυχο παραλιακό μαγαζάκι, με την κλασσική αυλή, μισοστρωμένη με τσιμέντο, τα πατροπαράδοτα τροπικά πεύκα και τα παραδοσιακά τετράγωνα τραπέζια. Καθόμαστε, έρχεται ο σερβιτόρος και όπως αφήνει τα νερά, συνειδητοποιούμε ότι το τραπέζι δεν πατάει καλά στο ανώμαλο έδαφος. Πριν καλά-καλά προλάβουμε να πάρουμε ένα χαρτάκι να το βάλουμε από κάτω, πετάγεται ο σερβιτόρος και με μία κίνηση τύπου «Ράμπο», στρίβει το τραπέζι και, ξαφνικά, αυτό σταματάει να παλαντζάρει. Εκστασιασμένοι όλοι, τον κοιτάμε με το στόμα ανοικτό να μας λέει: «Πάντα μπορεί να στρίψεις το τραπέζι έτσι ώστε να ισορροπεί». Έχει, άραγε, δίκιο ο σερβιτόρος;

Κεφάλαιο 1

Συναρτήσεις

1.1 Η έννοια της συνάρτησης

Κεντρικό ρόλο στην επίλυση όλων των παραπάνω προβλημάτων θα παίξει μία κεντρική[1] έννοια των μαθηματικών: αυτή της συνάρησης. Στόχος μας από εδώ και εμπρός θα είναι να μελετήσουμε, σε όποιο βάθος μπορούμε, αυτήν την έννοια και τις ιδιότητές της και, μέσω αυτών, σταδιακά να δώσουμε απαντήσεις σε όλα τα προβλήματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Ξεκινάμε, λοιπόν με τον ορισμό της συνάρησης[2].

1.1.1 Ο ορισμός της συνάρτησης — Πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής

Ορισμός 1.1: Συνάρτηση

Έστω A, B δύο μη κενά σύνολα. Μία διαδικασία—αντιστοίχιση $f : A \to B$ θα λέμε ότι είναι συνάρτηση από το A στο B αν **κάθε στοιχείο** του A το αντιστοιχίζει σε **ένα και μοναδικό στοιχείο** του B. Καλούμε επίσης το A *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης f, το B *πεδίο τιμών* της συνάρτησης f και το στοιχείο στο οποίο η f αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $a \in A$ το ονομάζουμε *τιμή της f στο a*.

Παρατήρηση 1.1. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση πρέπει να «στέλνει» **κάθε** στοιχείο του πεδίου ορισμού της[3] σε κάποιο (**μοναδικό**) στοιχείο του πεδίου τιμών της αλλά δεν είναι απαραίτητο οι τιμές της συνάρτησης να καλύπτουν όλο το πεδίο τιμών της. Το σύνολο που αποτελείται από τις τιμές της συνάρτησης f είναι το *σύνολο τιμών* της συνάρτησης.

□

Συνήθως, για να συμβολίσουμε το *μοναδικό* στοιχείο του συνόλου B στο οποίο η f αντιστοιχίζει το a χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $f(a)$ (f του a), όπου εννοούμε ότι:

$$a \overset{f}{\mapsto} f(a)$$

[1]Καταλαβαίνετε ότι είναι στο επίκεντρο της επιστήμης, ότι κατέχει κεντρικής σημασίας ρόλο και ότι επικεντρωνόμαστε σε κάτι σημαντικό. Εξ ου και η κατάχρηση της «κεντρικοσύνης».

[2]Ο ορισμός που θα χρησιμοποιούμε εδώ δεν είναι ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά αλλά ένας πιο «χαλαρός» ορισμός που χρησιμοποιείται στο σχολικό βιβλίο (Σ.Β.) ο οποίος όμως είναι «διαισθητικά» σύμφωνος με τον αυστηρό ορισμό της συνάρτησης.

[3]Άσχετα με το τι γράφουμε στον ορισμό μας, δεν είναι απαραίτητο να είναι και τα δύο σύνολα μη κενά, αλλά αυτό δε θα μας απασχολήσει καθόλου στα πλαίσια της σχολικής ύλης.

δηλαδή ότι η συνάρτηση f «στέλνει» το a στο $f(a)$.
Παρατήρηση 1.2. Δε γίνεται να υπάρχουν δύο *διαφορετικά* στοιχεία, x, y, του συνόλου B στα οποία η συνάρτηση να «στέλνει» το ίδιο στοιχείο a του A. Με άλλα λόγια, δε γίνεται να ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

$$f(a) = x \text{ και } f(a) = y$$

παρά μόνο αν $x = y$. Επομένως, από τον ορισμό έπεται ότι:

$$a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$$

για κάθε $a, b \in A$. Όπως θα δούμε από τα ακόλουθα παραδείγματα, η αντίστροφη συνεπαγωγή, δηλαδή η:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b, \ \forall a, b \in A$$

δεν ισχύει πάντα για μία συνάρτηση, ούτε είναι αναμενόμενο να ισχύει[4].

□

Ακολουθούν τώρα μερικά παραδείγματα με στόχο να αποσαφηνίσουμε τα λεπτά σημεία του ορισμού της συνάρτησης.
Παράδειγμα 1.1. Η αντιστοίχιση $f : A \to B$ όπου:

$$A = \text{το σύνολο όλων των κλειδιών της Αθήνας}$$
$$B = \text{το σύνολο όλων των πορτών της Αθήνας}$$

που αντιστοιχίζει κάθε κλειδί στην πόρτα την οποία ξεκλειδώνει, αγνοώντας τα κλειδιά πασπαρτού[5], είναι μία συνάρτηση αφού **κάθε κλειδί** ξεκλειδώνει ακριβώς **μία** πόρτα.

Αντιθέτως, η αντιστοίχιση $g : B \to A$ που αντιστοιχίζει κάθε πόρτα στα κλειδιά που την ξεκλειδώνουν *δεν είναι συνάρτηση* καθώς, αν σε ένα σπίτι μένουν περισσότερα του ενός άτομα τότε, ενδεχομένως, να υπάρχουν πάνω από ένα κλειδιά που ξεκλειδώνουν την ίδια πόρτα.

□

Παράδειγμα 1.2. Η αντιστοίχιση Παιδί : $A \to B$ όπου:

$$A = \text{το σύνολο των ενηλίκων που ζουν στην Σουμάτρα}$$
$$B = \text{το σύνολο των ανθρώπων που ζουν στην Σουμάτρα}$$

που αντιστοιχίζει κάθε γονέα στο παιδί του, δεν είναι απαραίτητα συνάρτηση, καθώς ενδέχεται να μην ικανοποιείται καμμία από τις δύο ιδιότητες του ορισμού. Δηλαδή:

1. ενδέχεται να υπάρχει κάποιος ενήλικας, ας τον ονομάσουμε E, που δεν έχει παιδιά, άρα η τιμή Παιδί(E) δεν ορίζεται,

2. ενδέχεται κάποιος γονέας να έχει δύο ή περισσότερα παιδιά.

□

Παράδειγμα 1.3. Η αντιστοίχιση $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία αντιστοιχίζει κάθε $x \in \mathbb{R}$ στο x^2 είναι συνάρτηση καθώς, κάθε πραγματικός αριθμός έχει έναν και μόνο αριθμό που είναι το τετράγωνό του.

□

[4]Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτές οι συναρτήσεις λέγονται $1-1$ και είναι ιδιαίτερα χρήσιμες.
[5]Πασπαρτού λέγεται ένα αντικλείδι που ανοίγει όλες τις κλειδαριές (εκ του passe partout των γαλλικών που σημαίνει «περνάει από παντού»). Πασπαρτού έλεγαν και τον (ταλαίπωρο) υπηρέτη του Φιλέα Φογκ στο γνωστό έργο του Ιουλίου Βερν «Ο γύρος του κόσμου σε 80 ημέρες».

Παράδειγμα 1.4. Η αντιστοίχιση $F : T \to K$ όπου:

$$T = \text{το σύνολο όλων των τεντζέρηδων του κόσμου}$$
$$K = \text{το σύνολο όλων των καπακιών του κόσμου}$$

που αντιστοιχίζει κάθε τέντζερη στο καπάκι του είναι συνάρτηση, αν εμπιστευτούμε τον θυμόσοφο λαό μας. Η αντιστοίχιση $H : K \to F$ που αντιστοιχίζει κάθε καπάκι στον τέντζερή της δεν είναι συνάρτηση γιατί δεν είναι απαραίτητο όλα τα καπάκια του κόσμου να είναι καπάκια κάποιου τέντζερη[6].

□

Παρατήρηση 1.3. Είναι σημαντικό εδώ να παρατηρήσουμε ότι τα σύνολα A, B, και ειδικότερα το σύνολο A, είναι μέρος της συνάρτησης f, όπως φαίνεται και από τον ορισμό της και από τα παραπάνω παραδείγματα. Δηλαδή, δεν μπορούμε να μιλάμε για μία συνάρτηση που αντιστοιχίζει όλα τα στοιχεία ενός συνόλου A σε κάποια στοιχεία ενός συνόλου B αν δεν έχουμε καθορίσει προηγουμένως ποιο είναι το σύνολο A. Έτσι, το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης είναι βασικό τμήμα της.

□

Στα πλαίσια της ύλης μας, θα ασχοληθούμε, κυρίως, με συναρτήσεις που αντιστοιχίζουν πραγματικούς αριθμούς σε πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή τα A, B είναι και τα δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Τέτοιες συναρτήσεις τις αποκαλούμε *πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής* και σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τον ορισμό της συνάρτησης ως εξής[7]:

Ορισμός 1.2: Πραγματική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής

Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ δύο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Μία διαδικασία—αντιστοίχιση $f : A \to B$ θα λέμε ότι είναι συνάρτηση από το A στο B αν **κάθε στοιχείο** του A το αντιστοιχίζει σε **ένα και μοναδικό στοιχείο** του B. Καλούμε επίσης το A *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης f, το B *πεδίο τιμών* της συνάρτησης f και το στοιχείο στο οποίο η f αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $a \in A$ το ονομάζουμε *τιμή της f στο a*

Κάποια παραδείγματα πραγματικών συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής (θα τις λέμε απλά συναρτήσεις, από εδώ κι εμπρός) είναι τα ακόλουθα[8]:

$$\begin{aligned}
&f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}\\
&g(x) = x^2,\ x \in [0,1]\\
&q(x) = \sqrt{x} + 2,\ x \in [0,+\infty)\\
&h(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}},\ x \in [0,1) \cup (5, 17.2)\\
&s(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι στις παραπάνω δεν προσδιορίζουμε το σύνολο B (το πεδίο τιμών) και δεχόμαστε «σιωπηρά» ότι αυτό είναι πάντα το $\mathbb{R}$. Αυτό γενικά είναι πάντα αλήθεια για τις πραγματικές συναρτήσεις, οπότε δεν μας προβληματίζει ιδιαιτέρως[9].

---

[6] Τέντζερη λέμε γενικά οποιοδήποτε χάλκινο μαγειρικό σκεύος, αν και, τώρα πια, αποτελεί παρωχημένο όρο.

[7] Δεν υπάρχει καμμία ουσιαστική αλλαγή πέρα από το ότι τα A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

[8] Για λόγους ευκολίας, αντί να γράφουμε $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dots$, γράφουμε απλά

$$f(x) = \dots,\ x \in A$$

όπου A το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

[9] Αν θέλουμε να βρούμε το *σύνολο τιμών* μίας συνάρτησης f και όχι απλά το πεδίο τιμών, δηλαδή το σύνολο που περιέχει μόνο τις τιμές της f τότε θα πρέπει να εργαστούμε με έναν ειδικό τρόπο, ο οποίος θα αναλυθεί σε επόμενη ενότητα.

Γενικότερα, αν για μία συνάρτηση μπορούμε να βρούμε έναν τρόπο να περιγράψουμε με μαθηματικά σύμβολα (πράξεις κ.λπ.) το πώς αυτή «στέλνει» το οποιοδήποτε x του πεδίου ορισμού της στο $f(x)$ τότε λέμε ότι έχουμε έναν **τύπο** για αυτήν τη συνάρτηση. Προφανώς, υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες δεν μπορούμε να βρούμε τύπο (όπως η συνάρτηση που στέλνει κάθε κλειδί στην πόρτα του δεν έχει τύπο, για παράδειγμα) αλλά εμάς θα μας απασχολήσουν, κυρίως, συναρτήσεις για τις οποίες έχουμε τύπο, όταν θα ασχολούμαστε με συγκεκριμένα παραδείγματα. Έτσι, για να πούμε ότι γνωρίζουμε ποια είναι μία συνάρτηση που μας δίνεται, πρέπει να έχουμε:

- τον τύπο της,
- το πεδιό ορισμού της.

Από αυτά παίρνουμε και τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.3: Ισότητα συναρτήσεων

Δύο συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι ίσες αν και μόνο αν:
1. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, δηλαδή $A = B$ και,
2. έχουν τον ίδιο τύπο , δηλαδή $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Τότε θα γράφουμε:
$$f = g.$$

Ας δούμε τώρα τα παρακάτω παραδείγματα πάνω στην ισότητα συναρτήσεων:
Παράδειγμα 1.5. Αν $f(x) = x^4$ με $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^4$ με $x \in [0, 1]$ τότε $f \neq g$ αφού, αν και οι f, g έχουν τον ίδιο τύπο, δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

□

Παράδειγμα 1.6. Αν $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ με $x \in (1, +\infty)$ και $g(x) = \sqrt{x} + 1$ με $x \in (1, +\infty)$ τότε οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και, όπως θα δείξουμε, έχουν τον ίδιο τύπο. Πράγματι, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in (1, +\infty)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)} = \\ &= \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}^2 - 1^2} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1))}{x-1} = \sqrt{x} + 1 = \\ &= g(x) \end{aligned}$$

οπότε οι δύο συναρτήσεις έχουν τον ίδιο τύπο, άρα είναι ίσες, δηλαδή $f = g$.

□

Πεδίο ορισμού συνάρτησης

Συχνά, και πάλι για λόγους ευκολίας, αντί να αναφέρουμε και τον τύπο και το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης, αναφέρουμε μόνο τον τύπο της, υπονοώντας ότι, σε αυτήν την περίπτωση, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το *ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ για το οποίο ο τύπος που μας δίνεται *έχει νόημα*. Για παράδειγμα, αν μας δίνεται μία συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = x^5 + 4x^2 + 1$$

τότε, αυτός ο τύπος έχει νόημα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (δεν υπάρχει, με άλλα λόγια, κάτι που να μας περιορίζει από τον τύπο της f), άρα, σε αυτήν την περίπτωση, το πεδίο ορισμού της f υπονοείται ότι είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Αν μας δοθεί, για παράδειγμα, η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 - 1} + 1\right)$$

τότε, για να βρούμε το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης πρέπει να εργαστούμε ως εξής:

- Εξετάζουμε πότε η υπόρριζη ποσότητα είναι μη αρνητική, δηλαδή:

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$$

ή, με άλλα λόγια, $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

- Εξετάζουμε πότε η ποσότητα μέσα στον λογάριθμο είναι θετική, δηλαδή:

$$\sqrt{x^2-1} + 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} > -1$$

το οποίο είναι αληθές για κάθε $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, μιας και η $\sqrt{x^2-1}$ είναι πάντα ένας μη αρνητικές αριθμός.

- Συναληθεύουμε τους περιορισμούς που έχουμε βρει (δηλαδή, κρατάμε μόνο τα κοινά στοιχεία), οπότε παίρνουμε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο:

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Υπενθυμίζουμε εδώ, σε ποιες περιπτώσεις πρέπει να παίρνουμε περιορισμούς:

Μορφή τύπου	**Περιορισμός**
$\dfrac{1}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$
$\sqrt{g(x)}$	$g(x) \geq 0$
$\ln g(x)$	$g(x) > 0$
$g(x)^{h(x)}$	$g(x) > 0$

Ακολουθούν τώρα μερικά παραδείγματα.
Παράδειγμα 1.7. Για τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2+4x-5}$$

έχουμε:

- Ο παρονομαστής πρέπει να μη μηδενίζεται, επομένως, θέλουμε:

$$x^2 + 4x - 5 \neq 0.$$

Επιλύουμε την εξίσωση:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -5$$

οπότε παίρνουμε τους αντίστοιχους περιορισμούς:

$$x \neq 1 \text{ και } x \neq -5.$$

- Θέλουμε η υπόρριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική, δηλαδή:

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

δηλαδή $x \in [2, +\infty)$.

- Συναληθεύουμε του περιορισμούς και βλέπουμε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο:

$$D_f = [2, +\infty).$$

□

Παράδειγμα 1.8. Για τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x+1)}{\sqrt{x+2} - 1}$$

έχουμε:

- Η ποσότητα μέσα στον λογάριθμο πρέπει να είναι θετική, δηλαδή:

$$x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

δηλαδή $x \in (-1, +\infty)$.

- Η υπόρριζη ποσότητα πρέπει να είναι μη αρνητική, δηλαδή:

$$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

δηλαδή $x \in [-2, +\infty)$.

- Ο παρονομαστής πρέπει να είναι μη μηδενικός, δηλαδή:

$$\sqrt{x+2} - 1 \neq 0.$$

Επιλύουμε την εξίσωση:

$$\sqrt{x+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

οπότε παίρνουμε τον περιορισμό:

$$x \neq -1.$$

- Συναληθεύοντας τους παραπάνω περιορισμούς παίρνουμε το πεδίο ορισμού της f:

$$D_f = (-1, +\infty).$$

□

Παράδειγμα 1.9. Για τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}}}$$

έχουμε:

- Η εσωτερική υπόρριζη παράσταση να είναι μη αρνητική, δηλαδή:

$$x \geq 0$$

δηλαδή $x \in [0, +\infty)$.

- Η ενδιάμεση υπόρριζη παράσταση να είναι μη αρνητική, δηλαδή:

$$1 - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$$

δεδομένου ότι $x \geq 0$, δηλαδή $x \in [0, 1]$.

- Η εξωτερική υπόρριζη παράσταση πρέπει να είναι μη αρνητική:

$$1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-\sqrt{x}}\leq 1 \Leftrightarrow 1-\sqrt{x}\leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}\geq 0$$

  το οποίο ισχύει για κάθε $x \geq 0$.

- Συναληθεύοντας του παραπάνω περιορισμούς παίρνουμε το πεδίο ορισμού της f:

$$D_f = [0,1].$$

□

Παράδειγμα 1.10. Για τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = (x^2-1)^{\ln x}$$

έχουμε:

- Η βάση της δύναμης πρέπει να είναι θετική, δηλαδή:

$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

  δηλαδή $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

- Η παράσταση μέσα στον λογάριθμο να είναι θετική, δηλαδή:

$$x > 0$$

  δηλαδή $x \in (0,+\infty)$.

- Συναληθεύοντας του παραπάνω περιορισμούς παίρνουμε το πεδίο ορισμού της f:

$$D_f = (1,+\infty).$$

□

Σύνολο τιμών συνάρτησης

Είδαμε στον ορισμό της συνάρτησης ότι εκτός από το πεδίο ορισμού, εμφανίζεται και ένα άλλο σύνολο· το σύνολο τιμών. Ως πεδίο τιμών, ορίζουμε οποιοδήποτε σύνολο περιέχει όλες τις τιμές που παίρνει μία συνάρτηση f. Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2$, τότε το πεδίο τιμών της f θα μπορούσε να είναι όλο το $\mathbb{R}$, ή το διάστημα $(-4,+\infty)$ ή το διάστημα $[-2020,+\infty)$ ή, γενικά, οποιοδήποτε άλλο σύνολο περιέχει μέσα του το $[0,+\infty)$. Ως εκ τούτου, συνήθως θεωρούμε ως πεδίο τιμών κάθε συνάρτησης όλο το $\mathbb{R}$.

Έχει όμως ιδιαίτερη σημασία, πολλές φορές, να γνωρίζουμε ακριβώς ποιες τιμές παίρνει μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Γι' αυτόν τον σκοπό ορίζουμε το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης, να είναι το σύνολο που περιέχει **αποκλειστικά** τις τιμές της συνάρτησης. Αυστηρά, έχουμε:

Ορισμός 1.4: Σύνολο τιμών

Αν $f : A \to B$ είναι μία συνάρτηση τότε ορίζουμε ως **σύνολο τιμών της** f και συμβολίζουμε με $f(A)$ το σύνολο όλων των $y \in B$ τα οποία «προέρχονται» από κάποιο $x \in A$ μέσω της f, δηλαδή:

$$f(A) = \{y \in B \mid \text{υπάρχει } x \in A \text{ με } f(x) = y\}.$$

Εν γένει, δεν έχουμε ακόμα κάποιον σαφή τρόπο για να βρίσκουμε το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης — στην πορεία της ύλης, θα αναπτύξουμε μία αρκετά γενική στρατηγική γι' αυτόν τον σκοπό — επομένως, περιοριζόμαστε στην αναζήτηση του συνόλου τιμών πολύ απλών συναρτήσεων, τις οποίες μπορούμε να χειριστούμε εύκολα αλγεβρικά. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 1.11. Αν $f(x) = x^2 - 4$, $x \in [0, 6]$, τότε, για να βρούμε το σύνολο τιμών της f, ξεκινάμε από την ανισότητα:

$$0 \leq x \leq 6,$$

και, σταδιακά, «χτίζουμε» τον τύπο της f:

$$\begin{aligned} &0 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &0 \leq x^2 \leq 36 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &-4 \leq x^2 - 4 \leq 32. \end{aligned}$$

Επομένως, $f([0, 6]) = [-4, 32]$.

□

Παράδειγμα 1.12. Αν $f(x) = 2 - 4\sqrt{x-2}$, $x \in [2, 6)$, τότε, για να βρούμε το σύνολο τιμών της f, ξεκινάμε από την ανισότητα:

$$2 \leq x < 6,$$

και, σταδιακά, «χτίζουμε» τον τύπο της f:

$$\begin{aligned} &2 \leq x < 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &0 \leq x - 2 < 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &0 \leq \sqrt{x-2} < 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &0 \geq -4\sqrt{x-2} > -8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &2 \geq 2 - 4\sqrt{x-2} > -6, \end{aligned}$$

Επομένως, $f([2, 6)) = (-6, 2]$.

□

1.1.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Όπως είδαμε, ο Oresme χρησιμοποιούσε διαγράμματα για να περιγράψει διάφορες κινήσεις σωμάτων. Μπορούμε να γενικεύσουμε αυτή τη μέθοδο και να φτιάξουμε γραφικές παραστάσεις διαφόρων συναρτήσεων ως εξής:

> Για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους $f(x)$ κάθετο στον άξονα $x'x$ και κρατάμε μόνο το άνω άκρο αυτού του ευθυγράμμου τμήματος.

Έτσι, τα σημεία που κρατάμε σχηματίζουν, πιθανώς, μία καμπύλη την οποία ονομάζουμε γραφική παράσταση της f. Ο τυπικός ορισμός της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης είναι ο ακόλουθος:

Ορισμός 1.5: Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

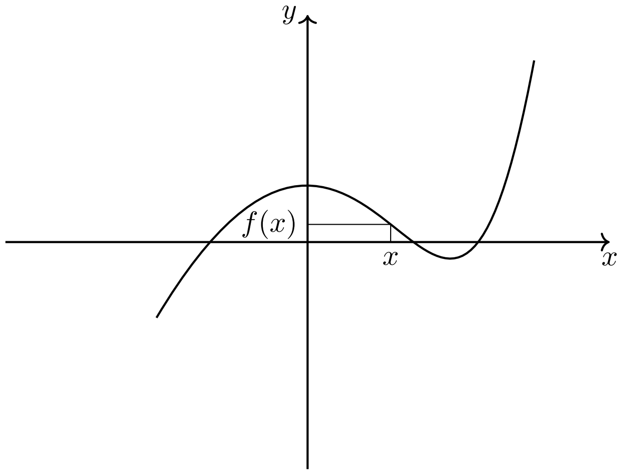
Ορίζουμε ως γραφική παράσταση C_f μίας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ το σύνολο των σημείων (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι:

1. $x \in A$,
2. $y = f(x)$.

Με άλλα λόγια, γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι το σύνολο:

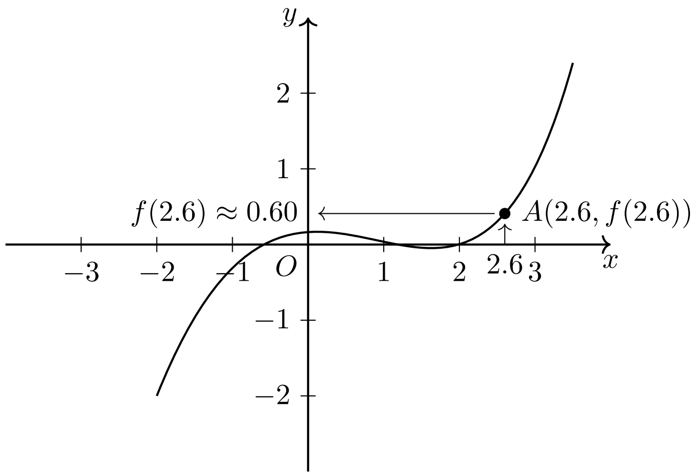
$$C_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

Η ιδέα του ορισμού φαίνεται πιο καθαρά στο σχήμα 1.1. Για την μελέτη των συναρτήσεων που θα



Σχήμα 1.1: Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

κάνουμε στα πλαίσια της ύλης μας, μία συνάρτηση καθορίζεται πλήρως για εμάς από την γραφική της παράσταση, δηλαδή, αν μας δοθεί η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης, τότε θεωρούμε ότι τη γνωρίζουμε πλήρως. Πράγματι, μέσω της γραφικής παράστασης γνωρίζουμε κάθε x του πεδίου ορισμού της σε ποιον ακριβώς αριθμό αντιστοιχίζεται, απλώς κατασκευάζοντας μία κάθετη προς τον άξονα $x'x$ από το σημείο $(x, 0)$ μέχρι και την καμπύλη (οπότε θα «πέσουμε» πάνω στο σημείο $(x, f(x))$) και από εκεί μία ευθεία κάθετη στον άξονα $y'y$ μέχρι και τον άξονα, οπότε «πέφτουμε» πάνω στο σημείο $(0, f(x))$. Σχηματικά, η διαδικασία αυτή περιγράφεται στο σχήμα 1.2.



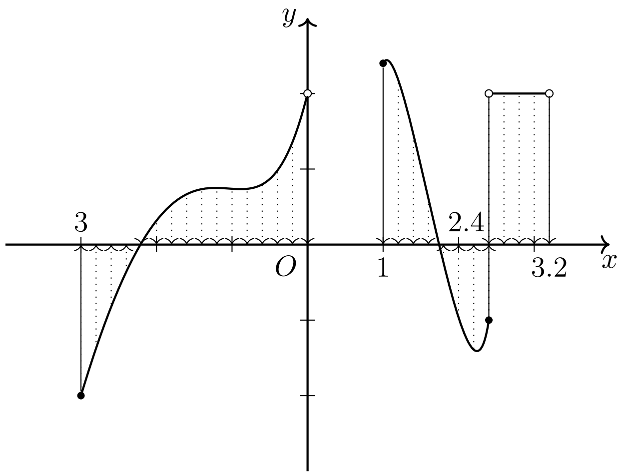
Σχήμα 1.2: Εύρεση της τιμής $f(2.6)$ μέσω της γραφικής παράστασης της f

Επίσης, από την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορούμε να βρούμε και το πεδίο ορισμού της άμεσα· είναι η προβολή[10] της γραφικής παράστασης πάνω στον άξονα $x'x$. Για παράδειγμα, η

[10]Να θυμίσουμε ότι για να προβάλουμε ένα οποιοδήποτε σχήμα πάνω σε μία ευθεία (ε) φέρνουμε από κάθε σημείο A του σχήματος ένα ευθύγραμμο τμήμα AB κάθετο προς την ευθεία (ε) και όλα αυτά τα σημεία B που προκύπτουν από τα A είναι η προβολή του σχήματος πάνω στην ευθεία (ε). Αλήθεια, η αντιστοίχιση που παίρνει ένα σημείο και το αντιστοιχίζει στην προβολή του πάνω σε μία ευθεία, είναι συνάρτηση;

συνάρτηση f με γραφική παράσταση αυτή του σχήματος 1.3 έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$D_f = [-3, 0) \cup [1, 2.4] \cup (2.4, 3.2) = [-3, 0) \cup [1, 3.2).$$



Σχήμα 1.3: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

Επομένως, εφ' όσον από την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης μπορούμε να «αντλήσουμε» και τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της, πράγματι, όταν μας δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μάς δίνεται και η ίδια η συνάρτηση.

1.1.3 Άλλες πληροφορίες που μας δίνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης για την ίδια τη συνάρτηση

Εκτός από τον «τύπο» και το πεδίο ορισμού[11] μίας συνάρτησης f, τι άλλες πληροφορίες μπορούμε να «αντλήσουμε» από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης; Ίσως να φαίνεται παράξενο, αλλά, τις περισσότερες φορές, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μας δίνει, άμεσα, πολύ περισσότερες πληροφορίες από ότι αν μας δινόταν απλώς ο τύπος της συνάρτησης. Μερικές από αυτές είναι οι ακόλουθες:

Το (ακριβές) σύνολο τιμών της f

Υπενθυμίζουμε ότι για μία συνάρτηση $f : A \to B$, το A λέγεται πεδίο ορισμού της f και το B πεδίο τιμών της f. Το σύνολο τιμών της f είναι **ακριβώς** εκείνες οι τιμές που παίρνει η f, δηλαδή είναι το σύνολο:

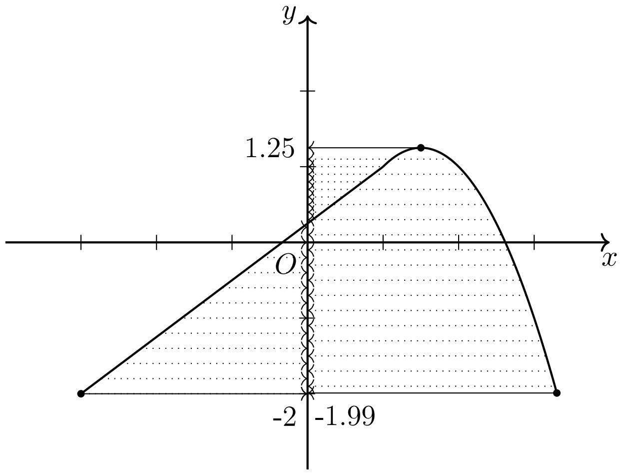
$$T = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{υπάρχει κάποιο } x \in A \text{ με } y = f(x)\}.$$

Συνήθως, το σύνολο T το συμβολίζουμε με[12] $f(A)$ και, εν γένει, είναι διαφορετικό από το πεδίο τιμών το οποίο μπορεί να είναι οποιοδήποτε σύνολο περιέχει το $f(A)$. Από τη γραφική παράσταση της f αυτό μπορούμε να το βρούμε άμεσα, καθώς, κατ' αναλογία με το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών είναι η προβολή της γραφικής παράστασης της f στον άξονα $y'y$. Για παράδειγμα, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.4 έχει ως σύνολο τιμών το σύνολο:

$$T = [-2, 1.25].$$

[11] Όπως είδαμε, δεν παίρνουμε ακριβώς τον τύπο, αν υπάρχει τύπος, μέσα από τη γραφική παράσταση, αλλά μπορούμε να βρούμε για κάθε x το $f(x)$, το οποίο μας είναι αρκετό.

[12] Η ιδέα του συμβολισμού είναι ότι όπως με $f(x)$ συμβολίζουμε τον *αριθμό* στον οποίο η f «στέλνει» τον x, έτσι και με $f(A)$ συμβολίζουμε το *σύνολο αριθμών* στο οποίο η f στέλνει τους αριθμούς από το A.



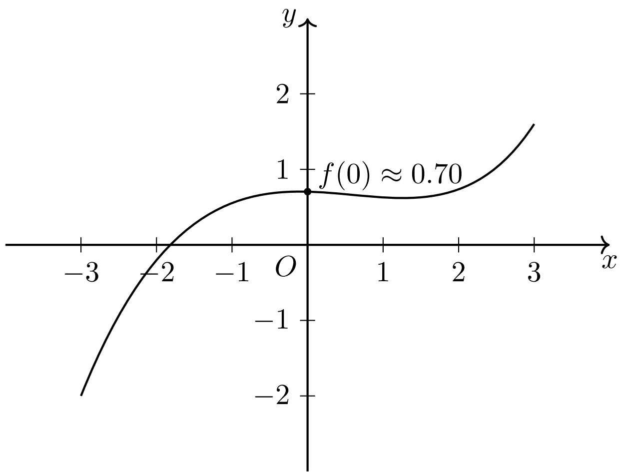
Σχήμα 1.4: Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Το $f(0)$

Από την γραφική παράσταση της f μπορούμε να βρούμε άμεσα[13] το $f(0)$, βρίσκοντας το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$. Για παράδειγμα, το $f(0)$ της συνάρτησης f με γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.5 είναι ο αριθμός:

$$f(0) \approx 0.70.$$

Προφανώς, αν το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης[14], δεν έχει νόημα να υπολογίσουμε



Σχήμα 1.5: Το $f(0)$ της συνάρτησης f

το $f(0)$

[13] Ουσιαστικά, δεν υπάρχει καμμία διαφορά ανάμεσα στο πώς θα υπολογίζαμε το $f(x)$ μέσω της γραφικής παράστασης της f όπως περιγράψαμε παραπάνω από το πώς υπολογίζουμε το $f(0)$, απλώς, στην περίπτωση του $f(0)$ η κάθετη ευθεία που φέρουμε από το 0 προς τον άξονα $x'x$ είναι ο ίδιος ο άξονας $y'y$, οπότε γλυτώνουμε ένα βήμα. Παρ' όλα αυτά, ξεχωρίζουμε το $f(0)$ γιατί, σε επόμενο κεφάλαιο, θα δούμε ότι μας είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε που τέμνει μία συνάρτηση τον άξονα $y'y$.

[14] Δηλαδή, αν η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.

Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ και γενικότερα της εξίσωσης $f(x) = c$ για $c \in \mathbb{R}$

Οι λύσεις της εξίσωσης:

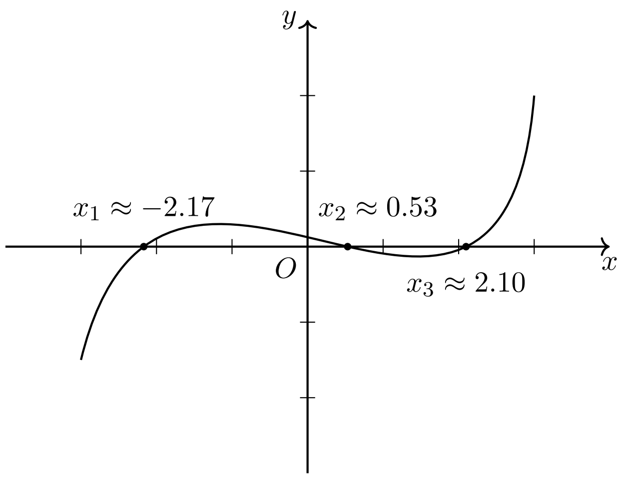
$$f(x) = 0$$

όπου f είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, είναι ακριβώς εκείνοι οι αριθμοί που ανήκουν στο A τους οποίους η συνάρτηση f «στέλνει» στο 0. Επομένως, αν $x_0 \in A$ είναι μία λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$, τότε θα πρέπει να ισχύει $f(x_0) = 0$, άρα το σημείο $M(x_0, 0)$ που βρίσκεται πάνω στον άξονα[15] $x'x$ είναι ένα σημείο **και** της γραφικής παράστασης της f. Αντίστροφα, αν ένα σημείο M της γραφικής παράστασης της f βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$ τότε αυτό πρέπει να είναι της μορφής $M(x_1, 0)$. Όμως κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της f είναι και της μορφής $(x, f(x))$, άρα, πρέπει να ισχύει ότι $f(x_1) = 0$, άρα το x_1 είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$. Δηλαδή:

> Οι λύσεις της εξίσωσης
>
> $$f(x) = 0$$
>
> είναι **ακριβώς** οι *τετμημένες*[16] των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

Για παράδειγμα, οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.6 είναι οι αριθμοί:

$$x_1 \approx -2.17,\ x_2 \approx 0.53,\ x_3 \approx 2.10.$$



Σχήμα 1.6: Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

Από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορούμε να συμπεράνουμε και ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύσεις, αν αυτή δεν τέμνει σε κανένα σημείο τον άξονα $x'x$.

Με ανάλογο τρόπο, μπορεί κανείς να δείξει ότι η εξίσωσης:

$$f(x) = c,$$

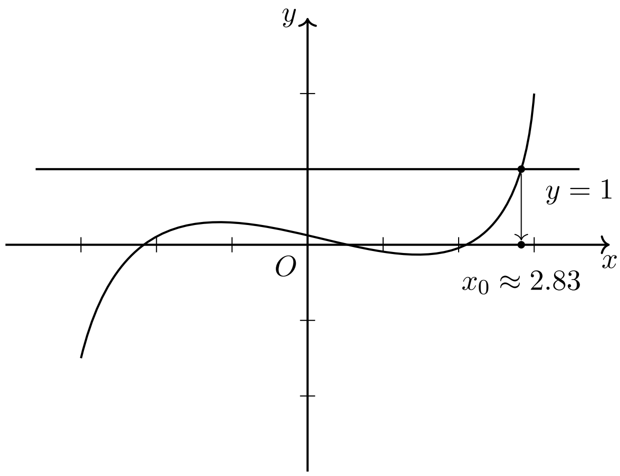
για κάποιο $c \in \mathbb{R}$, έχει ως λύσεις **ακριβώς** εκείνους τους αριθμούς του πεδίου ορισμού της συνάρτησης που είναι *τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με*

[15] Γιατί;

[16] Υπενθυμίζουμε ότι τετμημένη ενός σημείου $A(x, y)$ λέγεται η πρώτη συντεταγμένη του σημείου (το x, που λέμε).

την ευθεία $y = c$. Για παράδειγμα, αν f είναι η συνάρτηση του σχήματος 1.6, τότε, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.7, η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει ακριβώς μία λύση, την:

$$x_0 \approx 2.83.$$



Σχήμα 1.7: Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 1$

1.1.4 Χάραξη γραφικής παράστασης συνάρτησης - Γνωστές συναρτήσεις

Από τις τρεις παραπάνω διαδικασίες, η πρώτη και η τελευταία — εύρεση συνόλου τιμών και εύρεση ριζών της εξίσωσης $f(x) = c$ — είναι αρκετά περίπλοκες[17] όταν μας δίνεται ο τύπος της συνάρτησης χωρίς τη γραφική της παράσταση, πράγμα που θα φανεί ιδιαίτερα στην πορεία. Επομένως, το να έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ή το να μπορούμε με σχετική ευκολία να τη σχεδιάσουμε αν μας δίνεται ο τύπος της είναι ένα εργαλείο που θα μας χρειαστεί για την μελέτη των συναρτήσεων. Στόχος μας, στη συνέχεια, θα είναι να μελετήσουμε όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων που θα μας διευκολύνουν στο να σχεδιάσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης έχοντας, αρχικά, μόνο τον τύπο της. Παραθέτουμε εδώ, τις γραφικές παραστάσεις γνωστών συναρτήσεων που έχουμε συναντήσει σε προηγούμενες τάξεις και οι οποίες θεωρούνται γνωστές.

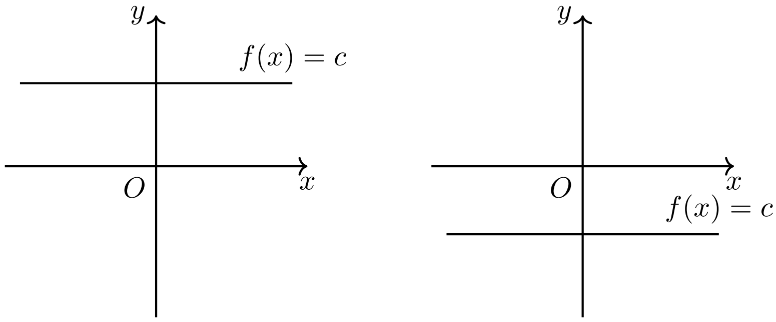
Σταθερή συνάρτηση

Η σταθερή συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = c$, για κάποιον σταθερό αριθμό $c \in \mathbb{R}$ και γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.8.

Γραμμική συνάρτηση

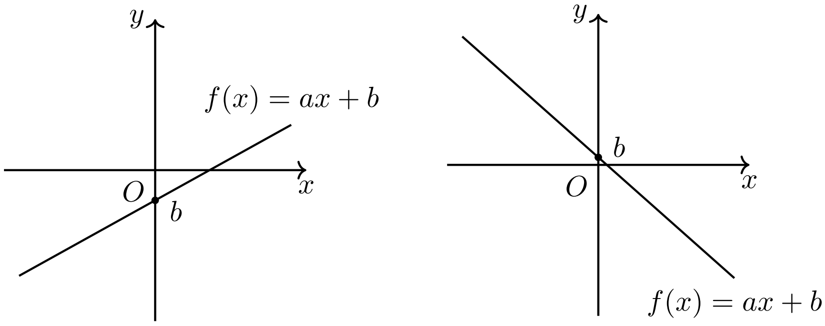
Μία γραμμική συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = ax + b$ με $a \neq 0$ — αλλιώς θα ήταν μία σταθερή συνάρτηση — και γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.9 για της διάφορες τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το b είναι πάντα ίσο με το $f(0)$ (προκύπτει άμεσα από τον τύπο της f) ενώ το a είναι η κλίση της ευθείας.

[17] Αντιθέτως, αν έχουμε τον τύπο μίας συνάρτησης, για να βρούμε το $f(0)$ δεν έχουμε παρά να αντικαταστήσουμε το 0 στη θέση του x στον τύπο της συνάρτησης και να κάνουμε τις πράξεις.



(α′) $c > 0$ (β′) $c < 0$

Σχήμα 1.8: Η σταθερή συνάρτηση για διάφορες τιμές του $c \in \mathbb{R}$

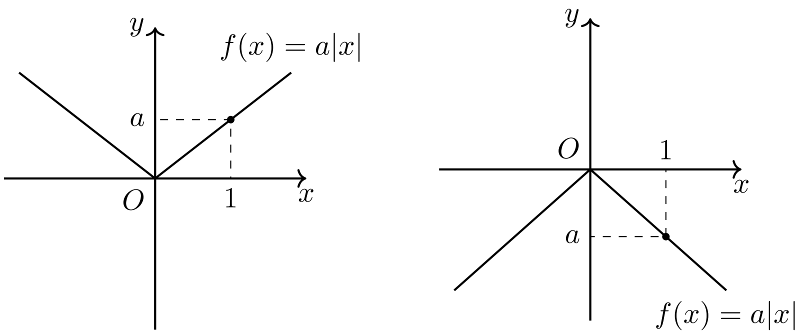


(α′) $a > 0$ (β′) $a < 0$

Σχήμα 1.9: Η γραμμική συνάρτηση για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση απόλυτη τιμή

Η συνάρτηση απόλυτη τιμή έχει τύπο $f(x) = a|x|$, όπου $a \in \mathbb{R}$ και γραφική παράσταση, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.10.

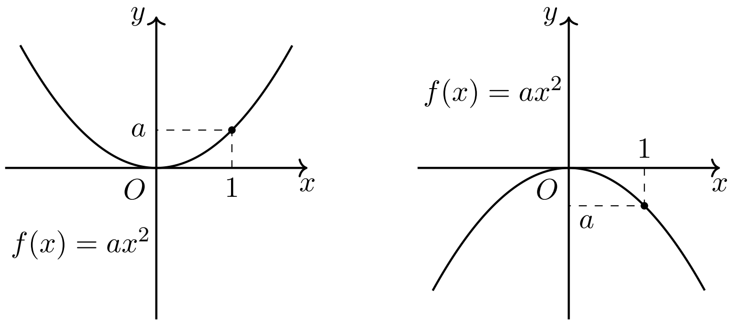


(α′) $a > 0$ (β′) $a < 0$

Σχήμα 1.10: Η συνάρτηση απόλυτη τιμή για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

Παραβολή με κορυφή το $O(0, 0)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$

Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση παραβολή, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.11, με κορυφή το $(0, 0)$ έχει τύπο $f(x) = ax^2$, όπου $a \neq 0$ και το a εκφράζει πόσο «ανοικτή» ή «κλειστή» είναι η παραβολή. Για την ακρίβεια, όσο πιο μεγάλες τιμές παίρνει το a, κατ' απόλυτη τιμή[18] τόσο πιο «στενή» και απότομη γίνεται η παραβολή — αυτό θα το εξετάσουμε αναλυτικότερα σε επόμενο κεφάλαιο.

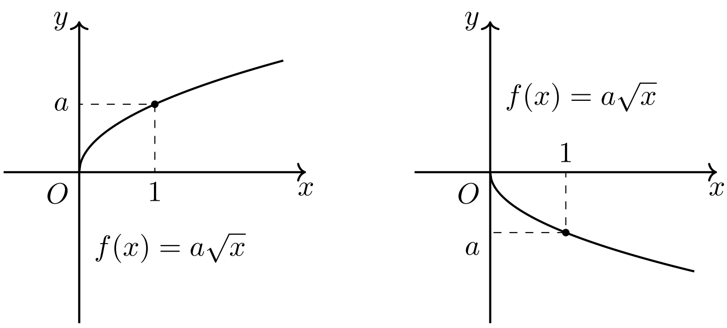


(α′) $a > 0$ (β′) $a < 0$

Σχήμα 1.11: Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$ για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

Τμήμα παραβολής με κορυφή το $O(0, 0)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$

Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση τμήμα παραβολής με κορυφή το $O(0, 0)$ και άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$, όπως αυτή που φείνεται στο σχήμα 1.12, έχει τύπο της μορφής $f(x) = a\sqrt{x}$.



(α′) $a > 0$ (β′) $a < 0$

Σχήμα 1.12: Η συνάρτηση $f(x) = a\sqrt{x}$ για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

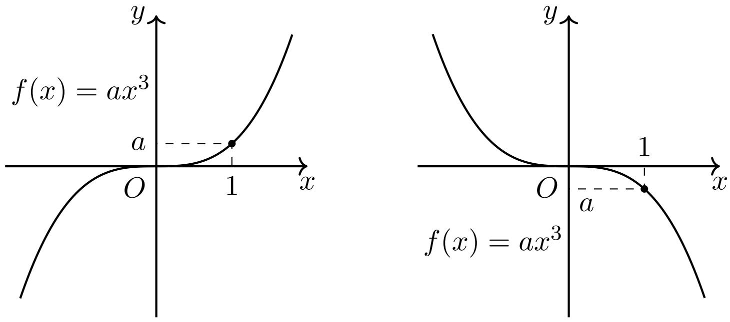
Κυβική καμπύλη με κέντρο συμμετρίας το $O(0, 0)$

Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση όπως όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.13 έχει τύπο $f(x) = ax^3$, όπου $a \neq 0$ και, όπως και με την παραβολή, το a εκφράζει το πόσο «ανοικτή» είναι η καμπύλη.

Ισοσκελής υπερβολή

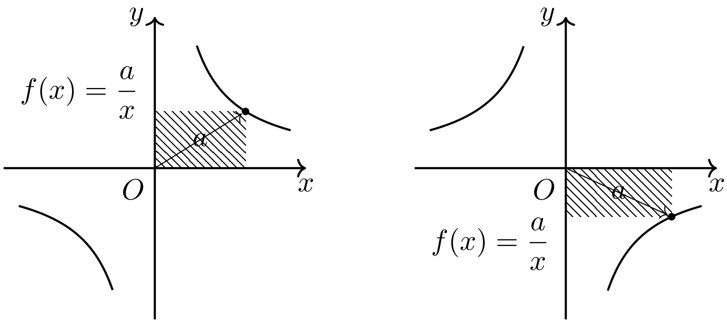
Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση ισοσκελή υπερβολή, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.14 έχει τύπο $f(x) = \dfrac{a}{x}$ με $a \neq 0$ και $x \neq 0$. Εδώ το a εκφράζει το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου με μία κορυφή την αρχή των αξόνων και διαγώνιο που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στην υπερβολή, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.14.

[18] Δηλαδή, όσο μεγαλύτερο γίνεται το $|a|$ ή, σχηματικά, όσο πιο μακριά βρίσκεται το a από το 0.



(α′) $a > 0$ (β′) $a < 0$

Σχήμα 1.13: Η συνάρτηση $f(x) = ax^3$ για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

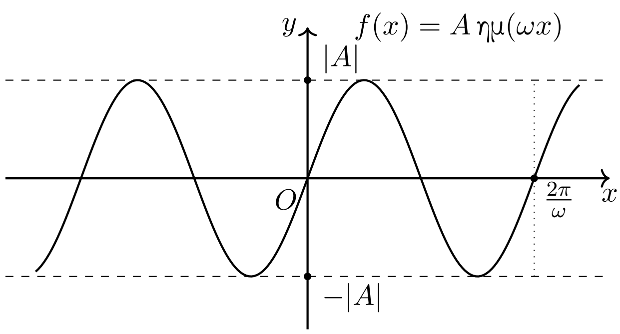


(α′) $a > 0$ (β′) $a < 0$

Σχήμα 1.14: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$ για διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

Ημιτονοειδής καμπύλη

Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση μία ημιτονοειδή καμπύλη, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.15, έχει εξίσωση της μορφής[19] $f(x) = A\,\text{ημ}(\omega x)$. Το A καθορίζει τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της συνάρτησης, ενώ το ω καθορίζει την περίοδό της, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

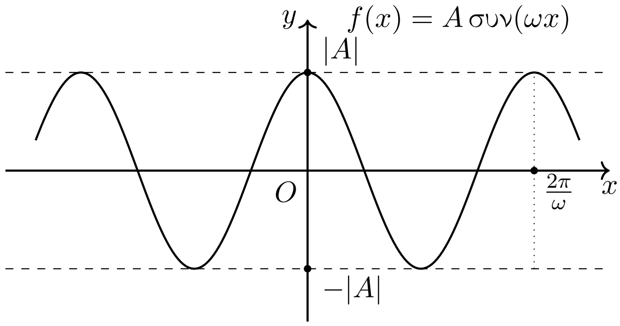


Σχήμα 1.15: Η συνάρτηση $f(x) = A\,\text{ημ}(\omega x)$

[19] Εδώ θα μπορούσαμε να γράψουμε $f(x) = a\,\text{ημ}(bx)$, απλώς «δανειστήκαμε» τον συμβολισμό από την φυσική, όπου συναντάμε πολλά περιοδικά μεγέθη των οποίων οι εξισώσεις κίνησης περιγράφονται από συναρτήσεις της μορφής $y = A\,\text{ημ}(\omega t)$, όπου A είναι συνήθως το πλάτος της κίνησης (δηλαδή, το εύρος των θέσεων μέσα στο οποίο κινείται το σώμα) και ω η γωνιακή του συχνότητα (δηλαδή, πόσες τέτοιες κινήσεις εκτελεί σε ένα δευτερόλεπτο).

Συνημιτονοειδής καμπύλη

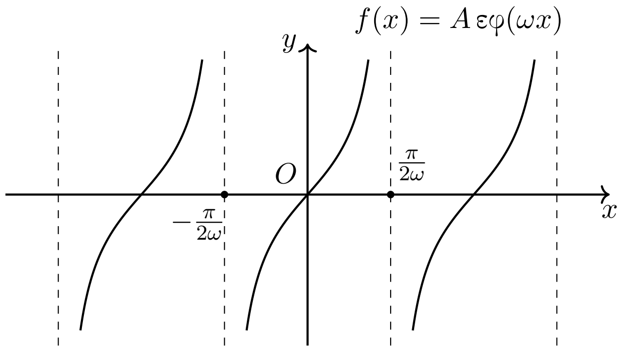
Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση μία συνημιτονοειδή καμπύλη, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.16, έχει εξίσωση της μορφής $f(x) = A\,\text{συν}(\omega x)$. Ανάλογα με την ημιτονοειδή συνάρτηση, το A καθορίζει τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές της συνάρτησης, ενώ το ω καθορίζει την περίοδό της, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.



Σχήμα 1.16: Η συνάρτηση $f(x) = A\,\text{συν}(\omega x)$

Καμπύλη εφαπτομένης

Μία συνάρτηση με γραφική παράσταση μία καμπύλη εφαπτομένης, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.17, έχει εξίσωση της μορφής $f(x) = A\,\text{εφ}(\omega x)$. Ανάλογα με την ημιτονοειδή και τη συνημιτονοειδή συνάρτηση, το ω καθορίζει την περίοδό της, $T = \frac{\pi}{\omega}$ αλλά το A καθορίζει το πόσο «ανοικτή» ή «κλειστή» είναι η καμπύλη (ανάλογα με την παραβολή ή την κυβική καμπύλη).



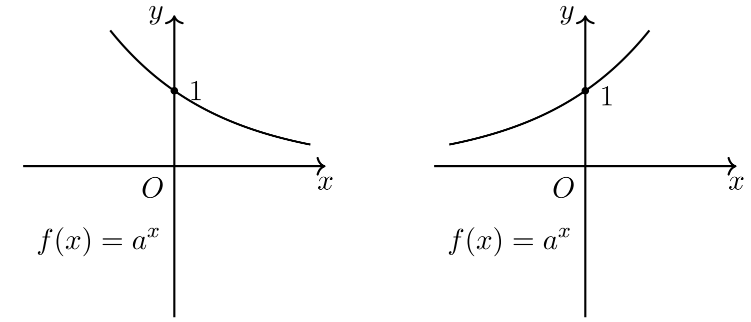
Σχήμα 1.17: Η συνάρτηση $f(x) = A\,\text{εφ}(\omega x)$

Εκθετική συνάρτηση

Μία εκθετική συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = a^x$ με $0 < a \neq 1$ και η μορφή της εξαρτάται από την τιμή του a, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.18. Να παρατηρήσουμε ότι όλες οι εκθετικές καμπύλες, ανεξαρτήτως της τιμής του a, διέρχονται από το σημείο $(0, 1)$.

Λογαριθμική συνάρτηση

Μία λογαριθμική συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = \log_a x$ με $0 < a \neq 1$ και η μορφή της εξαρτάται από την τιμή του a, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.19. Να υπενθυμίσουμε εδώ ότι με $\ln x$ συμβολίζουμε,



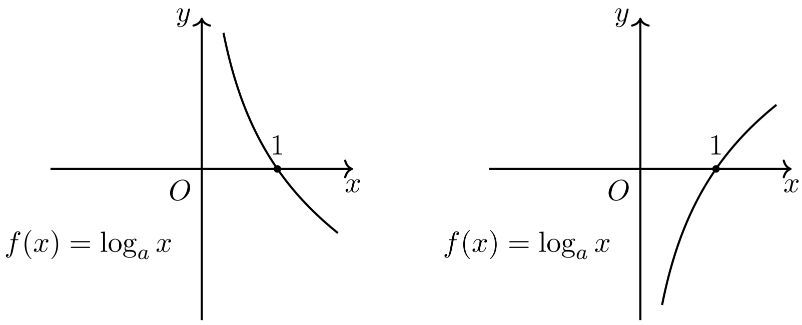
(α′) $0 < a < 1$ (β′) $a > 1$

Σχήμα 1.18: Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ για διάφορες τιμές του $0 < a \neq 1$

ειδικά, τον φυσικό λογάριθμο, δηλαδή:

$$\ln x = \log_e x.$$

Να παρατηρήσουμε, επίσης, ότι όλες οι λογαριθμικές καμπύλες, ανεξαρτήτως της τιμής του a, διέρχονται από το σημείο $(1, 0)$.



(α′) $0 < a < 1$ (β′) $a > 1$

Σχήμα 1.19: Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ για διάφορες τιμές του $0 < a \neq 1$

1.1.5 Εποπτική ερμηνεία του ορισμού της συνάρτησης

Είδαμε ότι μία αντιστοίχιση $f : A \to B$ είναι συνάρτηση αν στέλνει κάθε στοιχείο του A σε ένα και *μοναδικό* στοιχείο του B, με άλλα λόγια αν, για κάθε $x \in A$ υπάρχει ένα και μοναδικό $f(x) \in B$. Παρατηρήστε τώρα τις προηγούμενες δέκα περιπτώσεις απλών συναρτήσεων που παραθέσαμε και, ειδικά τις γραφικές παραστάσεις. Πώς φαίνεται αυτή η μοναδικότητα του $f(x)$ πάνω στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f; Προκύπτει κάθε καμπύλη του επιπέδου και, γενικότερα, κάθε σύνολο από σημεία του επιπέδου, από μία συνάρτηση;

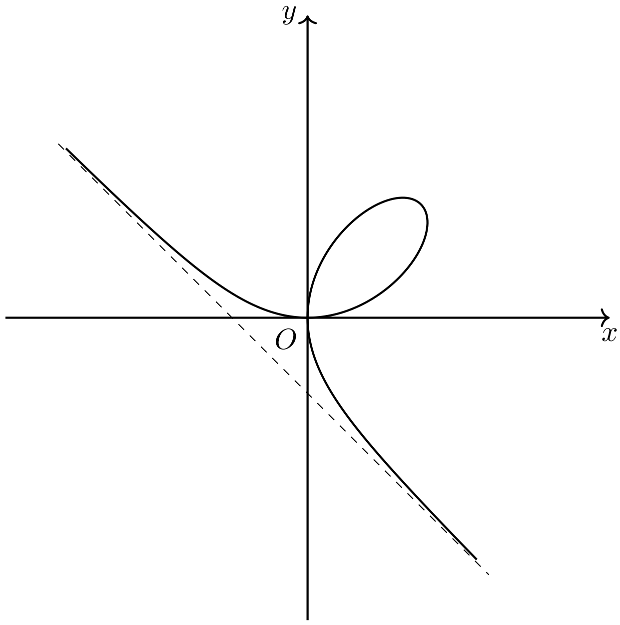
Ας δούμε ένα πιο συγκεκριμένο παράδειγμα. Θα μιλήσουμε τώρα λίγο για μία διάσημη καμπύλη, το φύλλο του Καρτέσιου, η οποία έχει εξίσωση:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

και η καμπύλη που περιγράφεται από αυτήν την εξίσωση[20] είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.20: Το ότι κάθε x αντιστοιχίζεται μέσω της f σε ένα και **μοναδικό** $f(x)$ σημαίνει ότι, αν τραβήξουμε

[20]Γενικά, φύλλο του Καρτέσιου ονομάζουμε κάθε καμπύλη με εξίσωση της μορφής

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$



Σχήμα 1.20: Το φύλλο του Καρτέσιου

μία ευθεία κάθετη σε ένα σημείο του άξονα $x'x$ — με άλλα λόγια, αν διαλέξουμε ένα $x \in \mathbb{R}$ — τότε έχουμε δύο πιθανά σενάρια:

1. είτε θα «χτυπήσουμε» τη γραφική παράσταση της f σε ένα σημείο, το $(x, f(x))$ και, προφανώς, από την *μοναδικότητα* του $f(x)$, σε κανένα άλλο,
2. είτε, αν το x δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, δε θα χτυπήσουμε τη γραφική της παράσταση σε κανένα σημείο.

Επομένως έχουμε το ακόλουθο συμπέρασμα:

> Μία καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης αν και μόνον αν κάθε κατακόρυφη ευθεία την τέμνει το πολύ σε ένα σημείο.

Έτσι, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.21 το φύλλο του Καρτέσιου δεν είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης, αφού υπάρχουν πολλές ευθείες κάθετες στον $x'x$ που τέμνουν την καμπύλη σε περισσότερα από ένα σημεία. Ωστόσο, αν χωρίσουμε την καμπύλη σε τρία τμήματα όπως φαίνεται στο σχήμα 1.22 τότε, το καθένα από αυτά αποτελεί τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης.

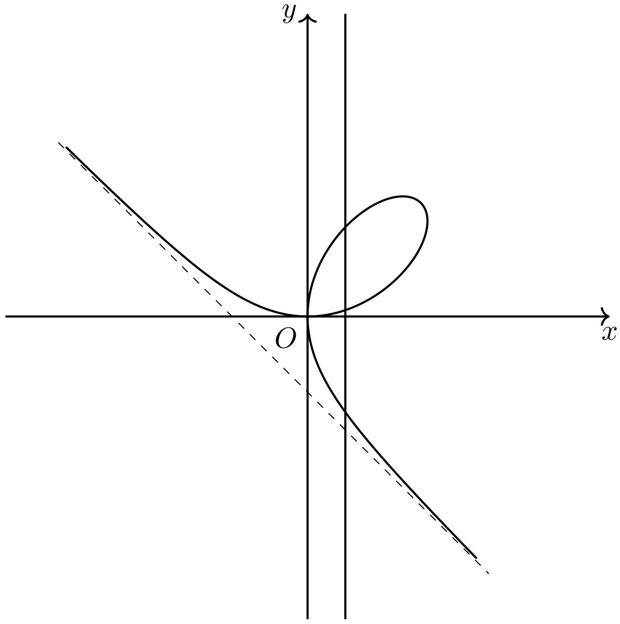
Επομένως, αν μας δοθεί μία καμπύλη, μπορούμε εύκολα να αποφανθούμε αν είναι ή όχι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης, απλώς εξετάζοντας αν υπάρχει ευθεία κάθετη στον άξονα $x'x$ που να την τέμνει σε περισσότερα από ένα σημεία.

Συνήθως, όμως, δε θα είμαστε τόσο τυχεροί έτσι ώστε να έχουμε την καμπύλη στα χέρια μας και το μόνο δεδομένο που θα έχουμε θα είναι η εξίσωσή της. Άλλωστε, ακόμα και για το φύλλο του Καρτέσιου για το οποίο συζητάμε, δεν είναι απλό να σχεδιάσει κανείς την καμπύλη που περιγράφεται από την εξίσωση:

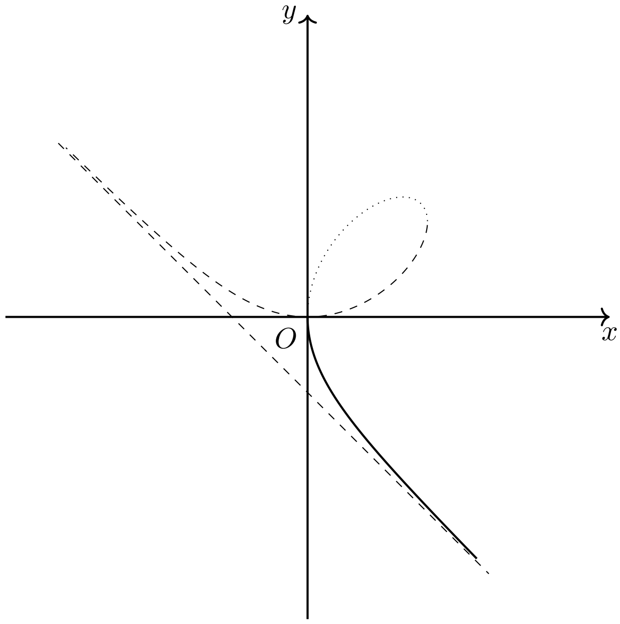
$$x^3 + y^3 - 3xy = 0 \tag{$\star$}$$

Θα θέλαμε, επομένως, και έναν τρόπο να μπορούμε να δούμε αν μία καμπύλη μπορεί να αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης μόνο από την εξίσωσή της. Ας σκεφτούμε λίγο: για να μπορεί να γραφτεί το y σαν συνάρτηση του x, πρέπει κάθε x να αντιστοιχίζεται σε ένα και μοναδικό y. Αυτό όμως σημαίνει ότι, όποια τιμή του x και να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση ($\star$) αυτή θα μας δίνει

όπου $a \in \mathbb{R}$ απλώς, για λόγους απλότητας εστιάζουμε στην περίπτωση $a = 1$.



Σχήμα 1.21: Το φύλλο του Καρτέσιου δεν είναι συνάρτηση



Σχήμα 1.22: Το φύλλο του Καρτέσιου «κατακρεουργημένο»

κάθε φορά μία και μοναδική λύση για το y. Δηλαδή, αν θέσουμε $x = a$, όπου a είναι κάποιος, αυθαίρετος, πραγματικός αριθμός, τότε πρέπει η εξίσωση:

$$a^3 + y^3 - 3ay = 0$$

να έχει μία και μοναδική λύση ως προς y, ας πούμε την $y = b$. Αν παίξουμε λίγο με τις τιμές που μπορούμε να δώσουμε στο a, θα δούμε ότι για $a = 1$ προκύπτει η εξίσωση:

$$y^3 - 3y + 1 = 0$$

η οποία έχει ακριβώς 3 πραγματικές λύσεις[21] επομένως, δεν υπάρχει ένα μοδανικό $y \in \mathbb{R}$ στο οποίο να αντιστοιχίζεται το $x = 1$, άρα το y δεν μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του y.

[21] Το πώς και το γιατί αυτή η εξίσωση έχει 3 λύσεις θα το δούμε αργότερα μέσα στην ύλη μας. Αν, ωστόσο,

Αν όμως μπορεί να γραφεί το x σαν συνάρτηση του y; Αν υπάρχει δηλαδή μία συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$x = g(y), \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R};$$

Στην προκειμένη περίπτωση, μπορούμε να εργαστούμε παρόμοια και, θέτοντας $y = 1$ στην εξίσωση $(\star)$ να δούμε ότι προκύπτει η εξίσωση:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

η οποία έχει ακριβώς 3 πραγματικές λύσεις, οπότε και πάλι δεν μπορούμε να γράψουμε ούτε το x σαν συνάρτηση του y.

Ας δούμε τώρα την παρακάτω καμπύλη:

$$x^2 + y^2 = 1, \; x > 0 \tag{$\dagger$}$$

Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει μία καμπύλη στο επίπεδο (βλ. σχήμα 1.23). Είναι αυτή η καμπύλη γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης, είτε του x είτε του y; Ας εξετάσουμε πρώτα αν είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης του x. Μετά από λίγο πειραματισμό, βλέπουμε ότι αντικαθιστώντας $x = \frac{1}{2}$ στην $(\dagger)$ παίρνουμε την εξίσωση:

$$y^2 = \frac{3}{4}$$

η οποία έχει δύο λύσεις ως προς y, τις $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, επομένως το y δεν μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του x.

Αν όμως προσπαθήσουμε να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς x, έχουμε:

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{1 - y^2} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{1 - y^2}.$$

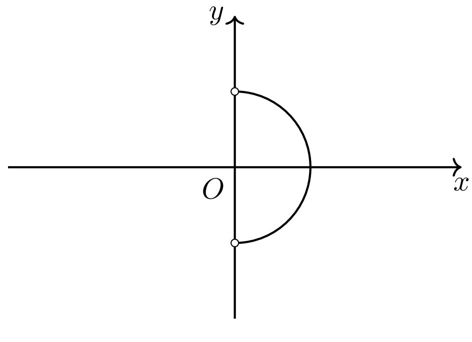
Εδώ σταματάμε για να σκεφτούμε. Στην εξίσωση της καμπύλης έχουμε ότι $x > 0$, επομένως η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$x = \sqrt{1 - y^2}$$

άρα, υπάρχει μία συνάρτηση g, η $g(y) = \sqrt{1 - y^2}$, τέτοια ώστε, για κάθε[22] $y \in (-1, 1)$, να ισχύει ότι:

$$x = g(y)$$

επομένως, η παραπάνω καμπύλη είναι η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης g. Αν σχε-



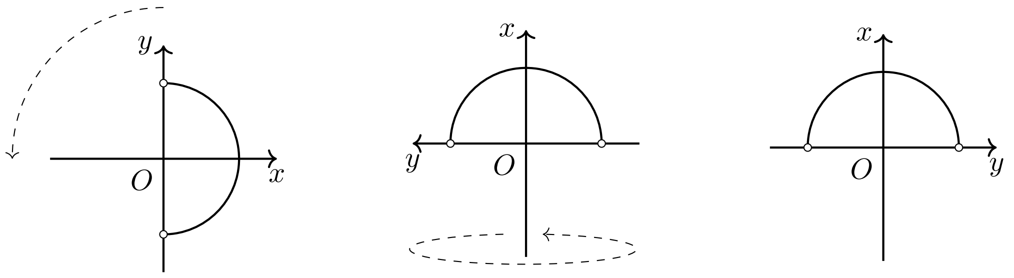
Σχήμα 1.23: Η καμπύλη $(\dagger)$

διάσουμε την καμπύλη με εξίσωση $(\dagger)$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.23, παρατηρούμε αμέσως ότι

κάποιος βιάζεται να δει πώς λύνουμε τριτοβάθμιες εξισώσεις γενικά — όχι με τον τρόπο που θα μας απασχολήσει φέτος — μπορεί να αναζητήσει στο διαδίκτυο τον τύπο του Cardano.

[22] Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, είναι εύκολο, αλλά έχει μία μικρή λεπτομέρεια που πρέπει να προσέξετε.

δεν μπορεί να είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης του x. Για να δούμε ότι μπορεί να είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης του y, πρέπει πρώτα να φέρουμε τους άξονες στη «σωστή» τους θέση: τον $y'y$ στη θέση του $x'x$ και τον $x'x$ στη θέση του $y'y$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.24. Τώρα είναι σαφές ότι όποια ευθεία κάθετη στον άξονα $y'y$ και να φέρουμε, αυτή θα τέμνει την καμπύλη το πολύ σε ένα σημείο, άρα η καμπύλη αυτή είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης[23] του y.



Σχήμα 1.24: Στρίβοντας τους άξονες

1.2 Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων — Διάταξη συναρτήσεων

Ως άνθρωποι[24], μας αρέσει να ανάγουμε τα νέα και τα άγνωστα πράγματα σε γνωστά και να τα συγκρίνουμε με αυτά, πράγμα απόλυτα λογικό, αφού τα γνωστά προς εμάς πράγματα, έννοιες κ.λπ. μπορούμε να τα χειριστούμε ευκολότερα. Έτσι, λοιπόν, θα θέλαμε να συσχετίσουμε τις συναρτήσεις με κάτι γνωστό σε εμάς, για παράδειγμα, με τους αριθμούς. Μάλιστα, θα ήταν και λίγο έως πολύ αναμενόμενο οι συναρτήσεις να διατηρούν πολλές από τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, δεδομένου ότι, στο κάτω-κάτω της γραφής, μία (πραγματική) συνάρτηση f παίρνει κάποιους αριθμούς x και τους αντιστοιχίζει σε κάποιους άλλους αριθμούς $f(x)$. Πράγματι, οι συναρτήσεις, έχουν αρκετές από τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών (προφανώς όχι όλες) και, σαφώς, έχουν και κάποια νέα χαρακτηριστικά, ιδιαίτερα χρήσιμα, τα οποία θα φανούν στην πορεία. Εμείς προς το παρόν θα σχοληθούμε με τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων.

1.2.1 Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων

Μπορούμε να προσθέσουμε συναρτήσεις; Ε, ναι, μπορούμε, ποιος μας περιορίζει να πούμε ότι αν έχοουμε δύο συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $f + g$ θα είναι η συνάρτηση που θα αντιστοιχίζει κάθε x όχι στο $f(x)$, ούτε στο $g(x)$, αλλά στο $f(x) + g(x)$; Δηλαδή θα κάνει την εξής δουλειά[25]:

$$x \overset{f+g}{\mapsto} f(x) + g(x)$$

ή, με άλλα λόγια:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Είναι όμως η αντιστοίχιση $f + g$ συνάρτηση; Και, αν είναι, ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

[23] Αυτό μπορούσαμε να το δούμε, ομολογουμένως, και από το αρχικό σχήμα, σχεδιάζοντας ευθείες κάθετες στον άξονα $y'y$ όπως ήταν, αλλά η διαδικασία των περιστροφών των αξόνων που ακολουθήσαμε στο σχήμα 1.24 θα μας φανεί χρήσιμη και στην πορεία.

[24] Ετοιμάζεται να αρχίσει την αμπελοφιλοσοφία, μαζέψτε τον!

[25] Το ότι συχνά χρησιμοποιούμε τη λέξη «δουλειά» για να μιλήσουμε για μία συνάρτηση δεν είναι τυχαίο. Οι συναρτήσεις χρησιμοποιούνται συχνά για να περιγράψουν διαδικασίες, σε διαφόρους τομείς. Επίσης, ο λόγος που χρησιμοποιούμε συνήθως το γράμμα f για να συμβολήσουμε μία συνάρτηση είναι ότι αυτό προέρχεται από το ρήμα fungor, που στα λατινικά σημαίνει «λειτουργώ».

Σε ότι αφορά το πρώτο ερώτημα, η $f+g$ είναι συνάρτηση διότι κάθε x έχει ένα και μοναδικό $f(x)$ και ένα και μοναδικό $g(x)$, επομένως, το $f(x)+g(x)$ είναι και αυτό μοναδικά καθορισμένο για κάθε x. Για το πεδίο ορισμού, η φυσιολογική απαίτηση είναι να έχει νόημα και το $f(x)$ και το $g(x)$, με άλλα λόγια, να είναι ορισμένες και οι δύο συναρτήσεις έτσι ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε[26] το $f(x)$ και το $g(x)$. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει το x να ανήκει και στο πεδίο ορισμού της f και στο πεδίο ορισμού της g, άρα, το πεδίο ορισμού της $f+g$ θα είναι το σύνολο $A\cap B$.

Ανάλογα, μπορούμε να ορίσουμε και τις άλλες συνήθεις αριθμητικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα[27]:

Πράξη	Πεδίο ορισμού
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$A\cap B$
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$A\cap B$
$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$	$A\cap B$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$A\cap\{x\in B\mid g(x)\neq 0\}$

1.2.2 Διάταξη συναρτήσεων

Μία άλλη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών που κληρονομούν οι συναρτήσεις είναι η διάταξή τους. Όπως λέμε ότι ένας αριθμός είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος από έναν άλλο, έτσι μπορούμε να πούμε και ότι μία συνάρτηση είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από μία άλλη, με βάση τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.6: Διάταξη συναρτήσεων

στω f και g δύο συναρτήσεις. Θα λέμε ότι η f είναι μικρότερη από την g και θα γράφουμε $f<g$ αν:

1. έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και
2. $f(x)<g(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού τους.

Παρατήρηση 1.4. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι για να συγκρίνονται δύο συναρτήσεις, πρέπει να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Επομένως, για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x)=x$ και $g(x)=\sqrt{x}$ δεν συγκρίνονται, εφ' όσον η πρώτη ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ενώ η δεύτερη μόνο για $x\in[0,+\infty)$. Αν όμως περιοριστούμε σε ένα διάστημα που να ορίζονται και οι δύο, ας πούμε στο $[3,4]$, τότε αυτές συγκρίνονται και ισχύει ότι $g<f$ στο διάστημα $[3,4]$.

□

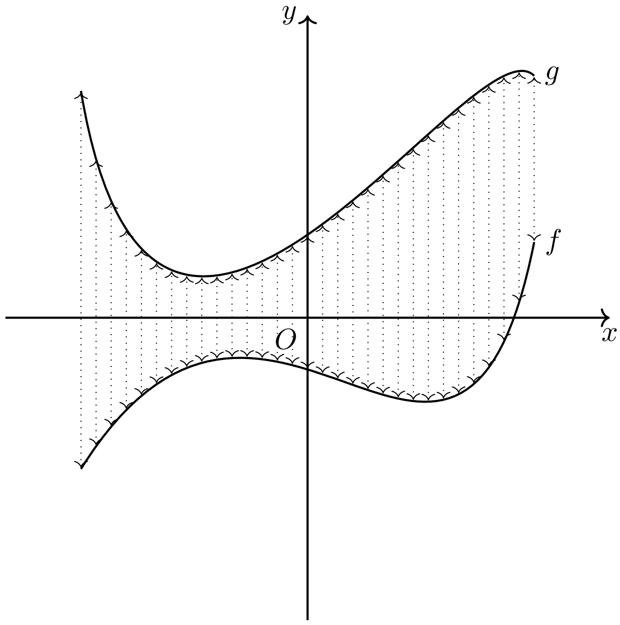
Εποπτικά, η διάταξη των συναρτήσεων ερμηνεύεται ως εξής: αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με $f<g$, τότε η γραφική παράσταση της f είναι «κάτω» από την γραφική παράσταση της g σε **κάθε σημείο**, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.25.

[26] Σκεφτείτε, για παράδειγμα, τις συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\sqrt{-x}$. Εδώ η $f+g$ δεν έχει νόημα, γιατί εκεί που ορίζεται η f δεν ορίζεται η g, καθώς $D_f=[1,+\infty)$ και $D_g=(-\infty,0]$.

[27] Επί της ουσίας, η διαδικασία που ακολουθούμε για να προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης όταν μας δίνεται μόνο ο τύπος, προκύπτει από το πώς ορίζεται το πεδίο ορισμού των πράξεων μεταξύ συναρτήεων. Για παράδειγμα, αν

$$h(x)=\sqrt{x}+\ln(1-x)$$

απαιτούμε και $x\geq 0$, δηλαδή το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{x}$, **και** $1-x>0\Leftrightarrow x<1$, δηλαδή το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της $g(x)=\ln(1-x)$, δηλαδή απαιτούμε να ανήκει στην *τομή* τους.



Σχήμα 1.25: Διάταξη συναρτήσεων: $f < g$

1.2.3 Σύνθεση συναρτήσεων: μία «διαφορετική» πράξη μεταξύ συναρτήσεων

Πέρα από τις συνηθισμένες πράξεις μεταξύ συναρτήσεων, μπορούμε να ορίσουμε και άλλη μία πράξη, βασιζόμενοι στη φύση των συναρτήσεων, η οποία δεν έχει νόημα στους πραγματικούς αριθμούς. Αυτήν την πράξη, που θα την ονομάσουμε *σύνθεση* συναρτήσεων και θα τη συμβολίζουμε με $\circ$, την ορίζουμε ως εξής:

Ορισμός 1.7: Σύνθεση συναρτήσεων

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις και $g(B) \cap A \neq \varnothing$, τότε ορίζουμε ως σύνθεση της g με την f τη συνάρτηση $f \circ g : D_{f\circ g} \to \mathbb{R}$ με

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Η ιδέα πίσω από τη σύνθεση δύο συναρτήσεων είναι η εξής: αν οι f και η g παριστάνουν δύο απλές διαδικασίες, για παράδειγμα, η f το κόψιμο ενός λαχανικού και η g το πλύσιμο ενός λαχανικού, τότε η σύνθεση της g με την f, $f \circ g$, παριστάνει την παρασκευή μίας σαλάτας που αποτελείται από το εν λόγω λαχανικό[28]. Έτσι, η τιμή:

$$(f \circ g)(\text{μαρούλι})$$

είναι μία μαρουλοσαλάτα.

Γενικότερα,για τον υπολογισμό της τιμής $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ακολουθούμε την εξής πορεία:

1. υπολογίζουμε πρώτα την τιμή της g στο x, δηλαδή την $g(x)$ και, στη συνέχεια,
2. υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης f στο $g(x)$, δηλαδή[29] την $f(g(x))$.

[28]Να επισημάνουμε ότι η σαλάτα δεν έχει ούτε λάδι ούτε αλάτι ούτε τίποτα· μόνο το λαχανικό, πλυμένο και κομμένο.

[29]Προσοχή! Όχι στο x, αλλά στο $g(x)$! Αφού το πλύναμε το μαρούλι, δε θα πάμε να κόψουμε το άπλυτο, το πλυμένο θα κόψουμε!

Σχηματικά, έχουμε αυτό που φαίνεται στο σχήμα 1.26.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & g(x) \arrow[r, mapsto, "f"] & f(g(x)) = (f \circ g)(x)
\end{tikzcd}
$$

Σχήμα 1.26: Η σύνθεση της g με την f.

Παρατήρηση 1.5. Η σύνθεση δύο συναρτήσεων δεν έχει πάντα νόημα[30]. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x) = -x^2$ και $g(x) = \ln x$, τότε παρατηρούμε ότι η σύνθεση $g \circ f$ δεν έχει νόημα, αφού $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0, +\infty)$.

□

Παρατήρηση 1.6. Εν γένει, η σύνθεση δύο συναρτήσεων είναι *μη μεταθετική πράξη*, δηλαδή **δεν** ισχύει ότι:

$$f \circ g = g \circ f,$$

για κάθε δύο συναρτήσεις f και g. Αυτό γίνεται σαφές και από την προηγούμενη παρατήρηση όπου η μία εκ των δύο συνθέσεων δεν υπάρχει, αλλά και αν κανείς θεωρήσει τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$. Σε αυτήν την περίπτωση οι $f \circ g$ και $g \circ f$ έχουν διαφορετικό τύπο, μιας και:

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \sqrt{\ln x} \\
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \ln\left(\sqrt{x}\right).
\end{aligned}
$$

□

Δεν έχουμε κάνει ακόμα εκτενή αναφορά στο πεδίο ορισμού της σύνθεσης της g με την f. Εδώ, θέλουμε να ικανοποιείται μία φυσιολογική απαίτηση:

- αφ' ενός πρέπει το x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της g, έτσι ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε το $g(x)$ και,
- αφ' ετέρου, πρέπει το $g(x)$ που θα υπολογίσουμε να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, έτσι ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε και το $f(g(x))$, δηλαδή, τελικά, το $(f \circ g)(x)$.

Επομένως, πρέπει από εκείνα τα στοιχεία του πεδίου ορισμού της g, δηλαδή του B, να κρατήσουμε εκείνα που η g τα «στέλνει» στο πεδίο ορισμού της f, δηλαδή στο A. Άρα, το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ είναι ακριβώς όσα στοιχεία x περιέχονται και στο B και το $g(x)$ ανήκει στο A, δηλαδή:

$$D_{f \circ g} = \{x \in B \mid g(x) \in A\}.$$

Παράδειγμα 1.13. Αν $f(x) = \frac{1}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x+2}$, τότε η σύνθεση $f \circ g$ έχει τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{x+2} - 1}$$

και πεδίο ορισμού:

$$
\begin{aligned}
D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \\
&= \left\{x \in [-2, +\infty) \mid \sqrt{x+2} \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)\right\} =
\end{aligned}
$$

[30]Όπως δεν έχει νόημα το «ανακάτεμα» διαφόρων λειτουργιών στη ζωή. Για παράδειγμα, κανείς δεν προσπαθεί να πλύνει ένα καρπούζι και μετά να το βάλει σε ένα παπούτσι, απλά γιατί το καρπούζι δεν είναι *συμβατό* με το παπούτσι.

$$
\begin{aligned}
&= \left\{x \in [-2,+\infty) \mid \sqrt{x+2} < 1 \text{ ή } \sqrt{x+2} > 1\right\} = \\
&= \left\{x \in [-2,+\infty) \mid \sqrt{x+2} \neq 1\right\} = \\
&= \{x \in [-2,+\infty) \mid x \neq -1\} = \\
&= [-2,-1) \cup (-1,+\infty).
\end{aligned}
$$

Από την άλλη, η σύνθεση $g \circ f$ έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{x-1} + 2} = \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$$

και πεδίο ορισμού:

$$
\begin{aligned}
D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \\
&= \left\{x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty) \mid \frac{1}{x-1} \in [-2,+\infty)\right\} = \\
&= \left\{x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty) \mid \frac{1}{x-1} \geq -2\right\} = \\
&= \left\{x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty) \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1\right\} = \\
&= \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (1,+\infty).
\end{aligned}
$$

□

Παρατήρηση 1.7. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ είναι το σύνολο που περιγράψαμε παραπάνω, δηλαδή το:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

και όχι απαραίτητα το σύνολο που προκύπτει από τον τύπο της $f \circ g$ όπως περιγράψαμε στην αρχή του κεφαλαίου. Για παράδειγμα, αν $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ έχει τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\ln x} = x$$

και πεδίο ορισμού:

$$
\begin{aligned}
D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \\
&= \{x \in (0,+\infty) \mid \ln x \in \mathbb{R}\} = \\
&= (0,+\infty).
\end{aligned}
$$

Αν όμως πάμε να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης από τον τύπο της τότε παίρνουμε ότι:

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

το οποίο είναι διαφορετικό από το $(0,+\infty)$. Γενικά, το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ προκύπτει ουσιαστικά από τον τρόπο με τον οποίο «κατασκευάζεται» η $f \circ g$, δηλαδή, από το πώς «ανακατεύονται» οι δύο λειτουργίες που περιγράφουν οι f, g. Στο παράδειγμά μας, δεδομένου ότι πρώτα πρέπει να πάρουμε τον λογάριθμο του x, περιοριζόμαστε αναγκαστικά στους θετικούς αριθμούς x και στη συνέχεια, «επιστρέφουμε», μέσω της e^x ξανά στους θετικούς αριθμούς x και όχι σε όλους[31].

□

[31] Ειδικά σε ό,τι έχει να κάνει με λογαρίθμους, σκεφτείτε και το ακόλουθο παράδειγμα. Στη χημεία, ορίζουμε το pH ενός διαλύματος να είναι ο αντίθετος του λογαρίθμου της συγκέντρωσης κατιόντων οξονίων στο διάλυμα,

1.2.4 Σύνθεση και γραφική παράσταση — Μεταφορές και Συμμετρίες

Γενικά, είναι δύσκολο, ακόμα, να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της σύνθεσης δύο συναρτήσεων f, g ακόμα και αν αυτές είναι σχετικά απλές, όπως για παράδειγμα οι $f(x) = \ln x$ και η $g(x) = \sqrt{x}$. Μπορούμε όμως να εξετάσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις συνθέσεων που θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες και είναι σχετικά απλές στο επίπεδο της χάραξης της γραφικής του παράστασης.

Η σύνθεση μίας συνάρτησης f με τη συνάρτηση $g(x) = x + c$, για $c \in \mathbb{R}$

Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $g \circ f$ έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + c$$

και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \\ &= \{x \in D_f \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \\ &= D_f. \end{aligned}$$

Ας πάρουμε τώρα μία συνάρτηση f με γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.27. Τότε, η γραφική παράσταση της $g \circ f$ αποτελείται από τα σημεία τη μορφής $(x, (g \circ f)(x))$, δηλαδή από τα σημεία της μορφής:

$$(x, f(x) + c).$$

Επί της ουσίας, η γραφική παράσταση της $g \circ f$ είναι η γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη παράλληλα στον άξονα $y'y$ κατά c. Επομένως, αν $c > 0$, η γραφική παράσταση της $g \circ f$ βρίσκεται πάνω από αυτήν της f σε απόσταση c ενώ αν $c < 0$ η γραφική παράσταση της $g \circ f$ βρίσκεται κάτω από αυτήν της f σε απόσταση $|c|$ όπως φαίνεται στα σχήματα 1.28 και 1.29.

Η σύνθεση της συνάρτησης $g(x) = x - c$ με μία συνάρτηση f, για $c \in \mathbb{R}$

Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $f \circ g$ έχει τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - c)$$

και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x - c \in D_f\}. \end{aligned}$$

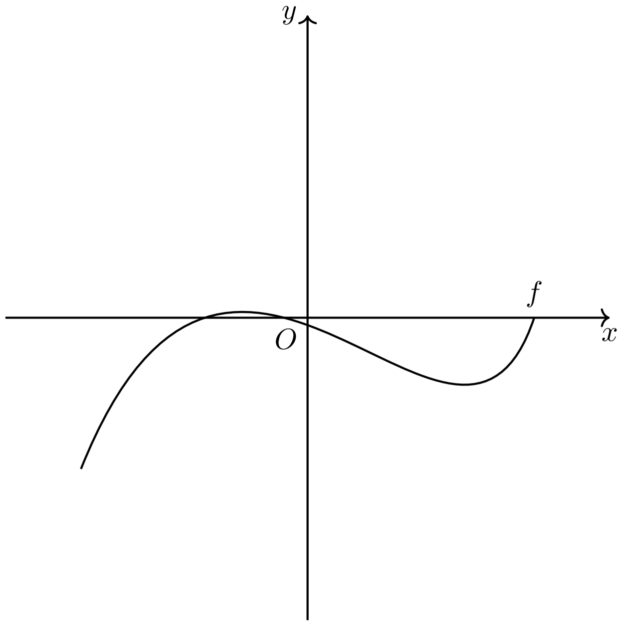
δηλαδή:

$$\text{pH} = -\log_{10}[H_3O^+].$$

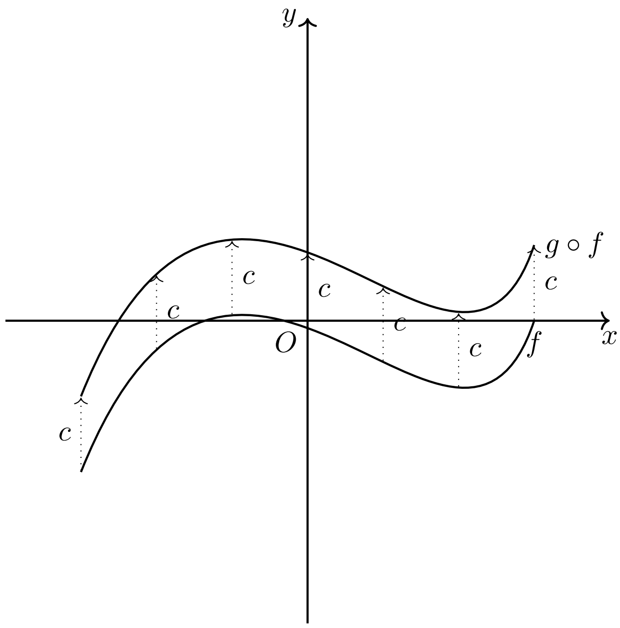
Δεδομένου ότι οι συγκεντρώσεις παίρνουν μόνο θετικές τιμές, αυτός ο ορισμός έχει πάντα νόημα. Αν θέλουμε να βρούμε τη συγκέντρωση των κατιόντων οξονίων με δεδομένο το pH ενός διαλύματος, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εκθετική συνάρτηση 10^{-x}. Τότε, επί της ουσίας υπολογίζουμε την τιμή της σύνθετης συνάρτησης:

$$10^{\log_{10} x}$$

για $x = [H_3O^+]$ οπότε βρίσκουμε τη ζητούμενη συγκέντρωση. Όμως, όπως και στο παράδειγμα, έτσι κι εδώ, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι μόνο οι θετικοί αριθμοί, πράγμα που προκύπτει και από τη διαδικασία που περιγράψαμε αλλά και από τους φυσικούς περιορισμούς του προβλήματος (οι συγκεντρώσεις δεν παίρνουν μη θετικές τιμές).



Σχήμα 1.27: Η συνάρτηση f



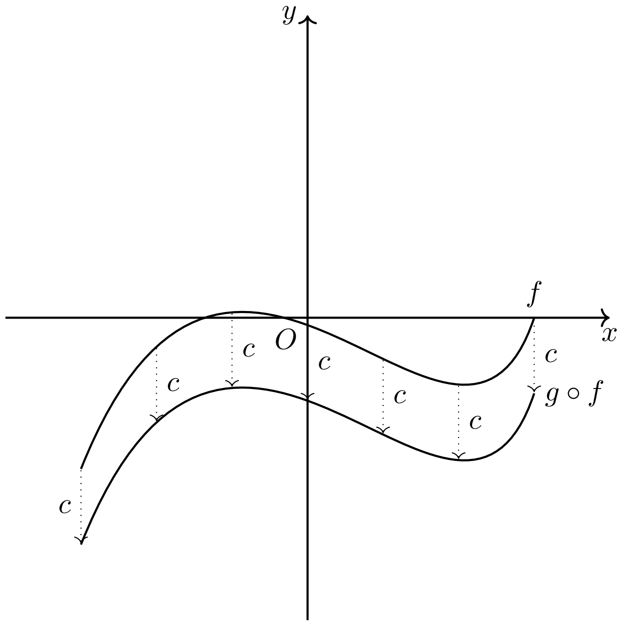
Σχήμα 1.28: Η γραφική παράσταση της $g \circ f$ για $c > 0$

Είνα δηλαδή εκείνοι οι αριθμοί x που, αν τους αφαιρέσουμε c τότε το $x - c$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Για παράδειγμα, αν $D_f = (0, 1)$ και $c = -1$, εκείνοι οι αριθμοί που αν τους αφαιρέσουμε -1 θα ανήκουν στο $(0, 1)$ είναι ακριβώς οι αριθμοί που βρίσκονται στο $(-1, 0)$, άρα, σε αυτήν την περίπτωση το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ θα ήταν το $(-1, 0)$.

Η γραφική παράσταση της $f \circ g$ αποτελείται από όλα τα σημεία της μορφής $(x, (f \circ g)(x))$ δηλαδή από τα σημεία της μορφής:

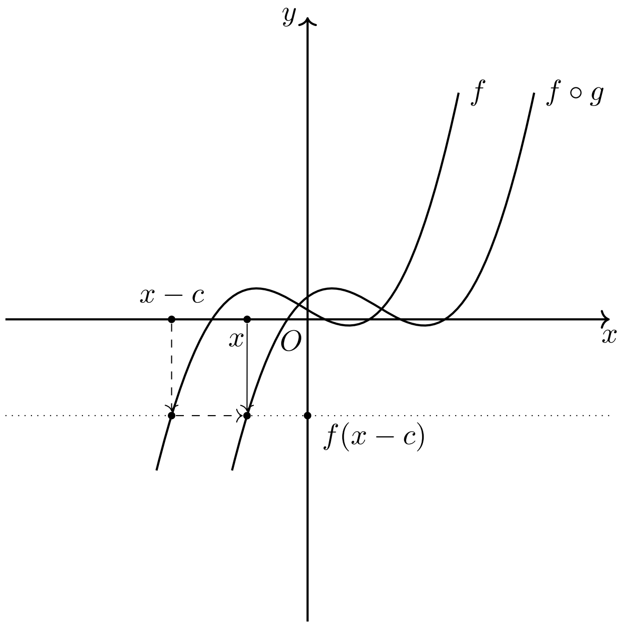
$$(x, f(x - c)).$$

Σε σχέση με τη γραφική παράσταση της f, η γραφική παράσταση της $f \circ g$ είναι μετατοπισμένη παράλληλα στον άξονα $x'x$ κατά c. Αν μάλιστα το c είναι θετικό τότε αυτή είναι μετατοπισμένη προς τα δεξιά ενώ αν είναι αρνητικό είναι προς τα αριστερά, όπως φαίνεται και στα σχήματα 1.30



Σχήμα 1.29: Η γραφική παράσταση της $g \circ f$ για $c < 0$

και 1.31.



Σχήμα 1.30: Η γραφική παράσταση της $f \circ g$ για $c > 0$

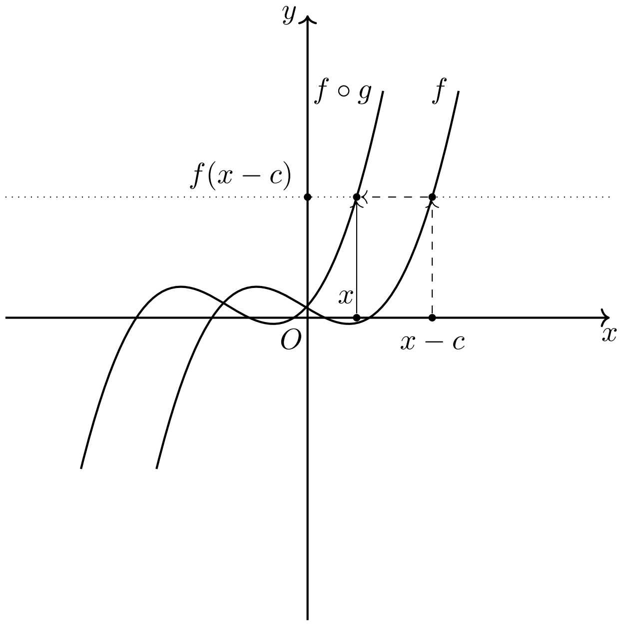
Η σύνθεση μίας συνάρτησης f με την συνάρτηση $g(x) = -x$

Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρηση $g \circ f$ έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -f(x)$$

και πεδίο ορισμού:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} =$$



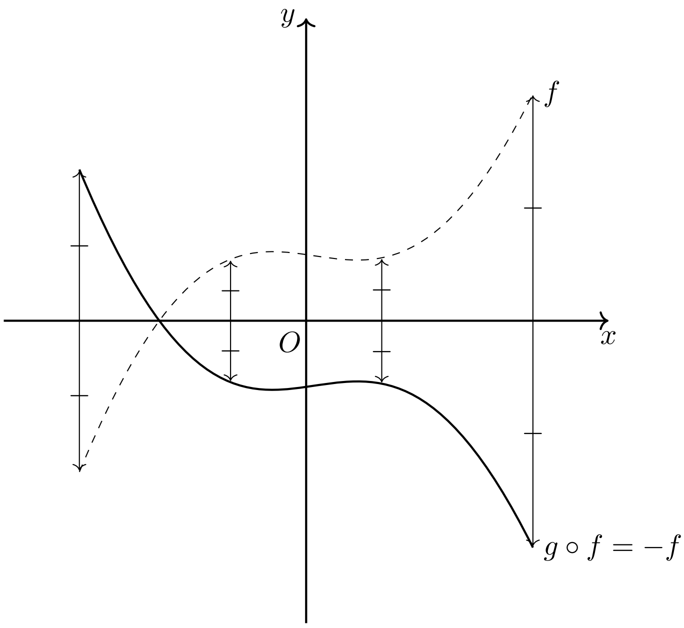
Σχήμα 1.31: Η γραφική παράσταση της $f \circ g$ για $c < 0$

$$\begin{aligned} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \\ &= D_f. \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $g \circ f$ αποτελείται ακριβώς από τα σημεία της μορφής $(x, (g \circ f)(x))$, δηλαδή από τα σημεία της μορφής:

$$(x, -f(x)).$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της $g \circ f = -f$ είναι, ουσιαστικά, η συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.32.



Σχήμα 1.32: Η γραφική παράσταση της $g \circ f = -f$

Η σύνθεση της συνάρτησης $g(x) = -x$ με μία συνάρτηση f

Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $f \circ g$ έχει τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x)$$

και πεδίο οριμού:

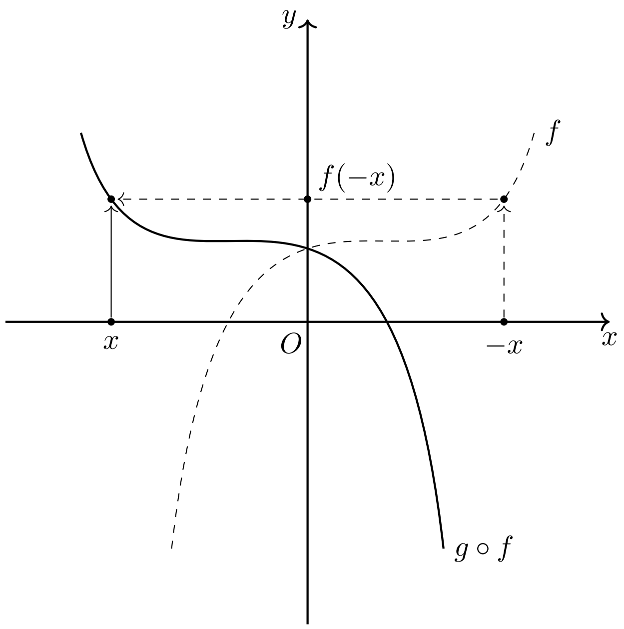
$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in D_f\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ απότελείται από εκείνους τους αριθμούς $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους *ο αντίθετός τους* ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Για παράδειγμα, αν το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-1, 4)$ τότε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το $(-4, 1)$.

Η γραφική παράσταση της $f \circ g$ αποτελείται ακριβώς από τα σημεία της μορφής $(x, (f \circ g)(x)))$, δηλαδή από τα σημεία της μορφής:

$$(x, f(-x)).$$

Έτσι, η γραφική παράσταση της $f \circ g$ είναι, ουσιαστικά, η συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $y'y$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.33.



Σχήμα 1.33: Η γραφική παράσταση της $g \circ f$

Η σύνθεση μίας συνάρτησης f με τη συνάρηση $g(x) = |x|$

Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $g \circ f$ έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = |f(x)|$$

και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \\ &= \{x \in D_f \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \end{aligned}$$

$$= D_f.$$

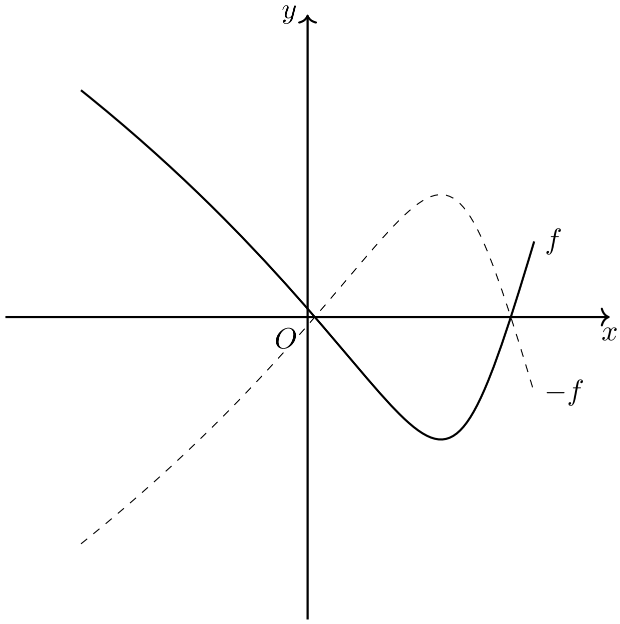
Η γραφική παράσταση της $g \circ f = |f|$ αποτελείται ακριβώς από τα σημεία της μορφής $(x, (g \circ f)(x))$, δηλαδή από τα σημεία της μορφής:

$$(x, |f(x)|).$$

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{αν } f(x) < 0 \end{cases}$$

δηλαδή, η γραφική παράσταση της $|f|$ συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της f όπου η f είναι μη αρνητική (δηλαδή βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή τον τέμνει) και με τη γραφική παράσταση της $-f$ όπου η f είναι αρνητική (δηλαδή βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$). Για παράδειγμα, για την συνάρτηση με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.34, η $g \circ f = |f|$ έχει γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.35.



Σχήμα 1.34: Η συνάρτηση f και η $-f$

Η σύνθεση της $g(x) = |x|$ με μία συνάρτηση f

Σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση $f \circ g$ έχει τύπο:

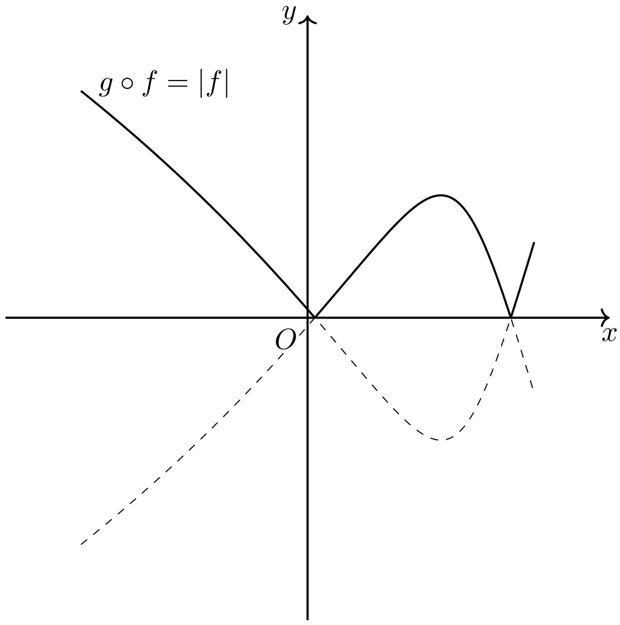
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x|)$$

και πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \in D_f\} \end{aligned}$$

Εδώ είναι σημαντικό να προσέξουμε ότι η παραπάνω σύνθεση, σε αντίθεση με τις άλλες που περιγράψαμε, ενδέχεται να μην ορίζεται πάντα. Αν, για παράδειγμα, $f(x) = \sqrt{-1 - x}$, τότε η σύνθεση

$$(f \circ g)(x) = f(|x|) = \sqrt{-1 - |x|}$$



Σχήμα 1.35: Η γραφική παράσταση της $g \circ f = |f|$

δεν έχει νόημα, καθώς $-1 - |x| \leq -1 < 0$ και δεν μπορούμε να μιλάμε για τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών[32].

Η γραφική παράσταση της $f \circ g$ περιέχει ακριβώς τα σημεία της μορφής $(x, f(|x|))$, δηλαδή τα σημεία της μορφής:

$$\begin{cases} (x, f(x)) & \text{αν } x \geq 0 \\ (x, f(-x)) & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Ουσιαστικά, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f \circ g$ είναι, για $x \geq 0$ η γραφική παράσταση της f και, για $x < 0$, η γραφική παράσταση της $f(-x)$, αρκεί το $-x$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Με άλλα λόγια, είναι το τμήμα της γραφικής παράστασης της f δεξιά από τον άξονα $y'y$ και το συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση f με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.36, η $f(|x|)$ έχει γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.37.

Επομένως, έχουμε εμπλουτίσει αρκετά το «οπλοστάσιό» μας σε ό,τι αφορά το για ποιες συναρτήσεις μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική τους παράσταση. Ωστόσο, οι δυνατότητές μας παραμένουν ακόμα αρκετά περιορισμένες, καθώς δεν έχουμε τα εργαλεία να χαράξουμε γραφικές παραστάσεις όπως, για παράδειγμα, της συνάρτησης:

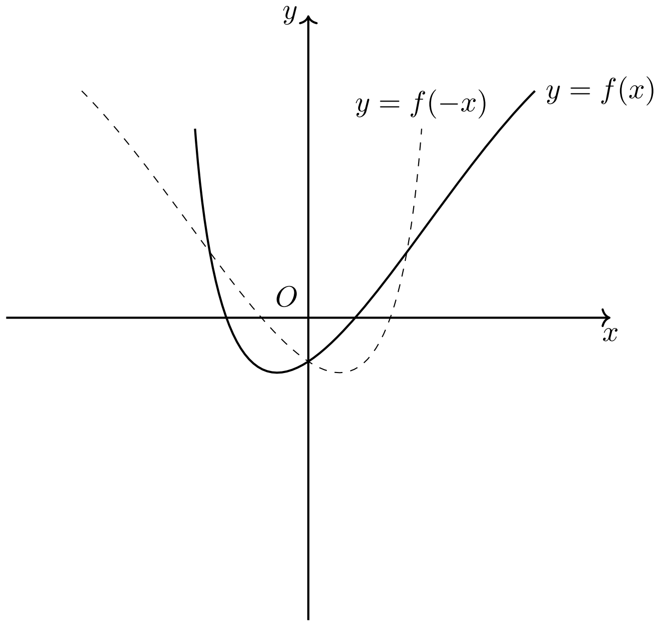
$$f(x) = \ln x + x$$

που είναι απλώς το άθροισμα δύο συναρτήσεων με γνωστή γραφική παράσταση. Αλλά αυτά τα απαραίτητα εργαλεία θα τα αναπτύξουμε στην πορεία. Ας δώσουμε τώρα μερικά παραδείγματα γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων χρησιμοποιώντας και τις νέες μας γνώσεις.

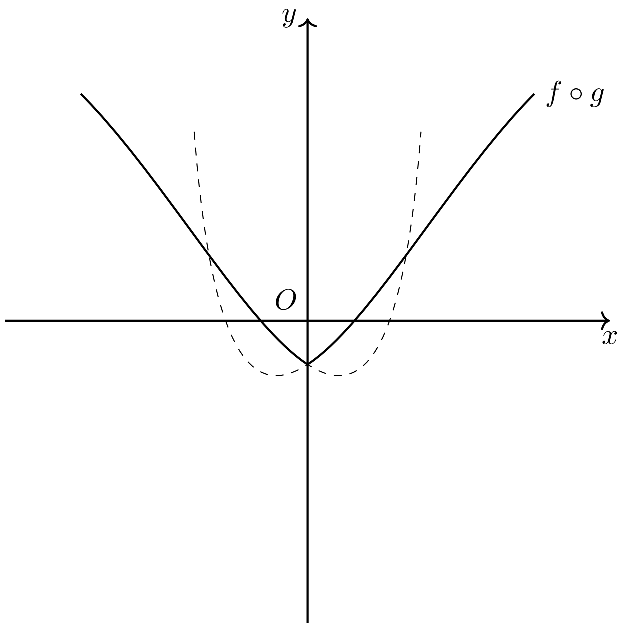
Παράδειγμα 1.14. Αν $f(x) = 2 - \ln(x + 1)$, με $x > -1$, τότε για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της f πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα:

1. σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\ln x$,
2. με μία οριζόντια μετατόπιση προς τα αριστερά κατά 1, παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $\ln(x + 1)$,

[32] Γενικά, για να έχει νόημα η συνάρτηση $f(|x|)$ πρέπει η συνάρτηση f να μη «ζει» ολόκληρη στο αριστερό ημιεπίπεδο, δηλαδή πρέπει το πεδίο ορισμού της να περιέχει και μη αρνητικούς αριθμούς (στο παράδειγμά μας, το πεδίο ορισμού της συνάρτησής μας ήταν το $(-\infty, -1]$).



Σχήμα 1.36: Η γραφική παράσταση της $f(x)$ και της $f(-x)$



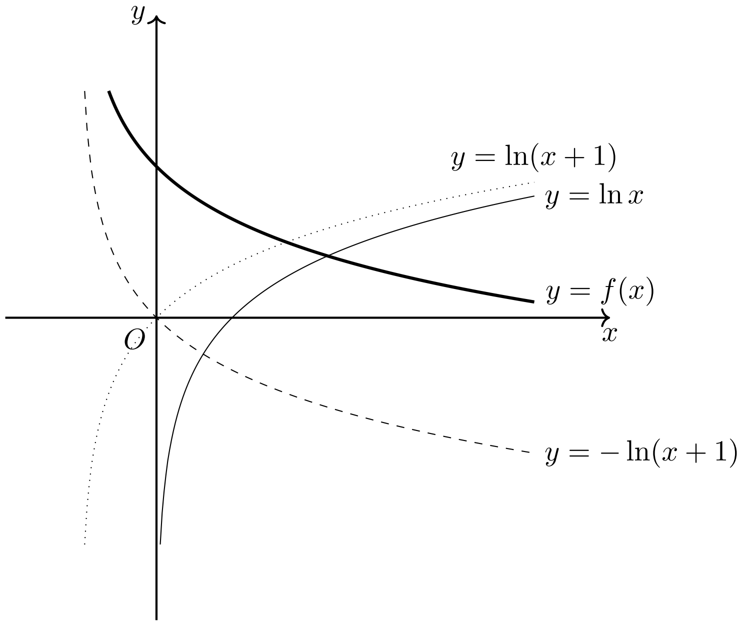
Σχήμα 1.37: Η γραφική παράσταση της $f \circ g$

3. σχεδιάζοντας τη συμμετρική της $\ln(x+1)$ ως προς τον άξονα $x'x$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $-\ln(x+1)$ και, τέλος,
4. με μία κατακόρυφη μετατόπιση προς τα πάνω κατά 2 παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $-\ln(x+1)+2$, δηλαδή της f.

Όλα αυτά φαίνονται, διαδοχικά, στο σχήμα 1.38.

□

Παράδειγμα 1.15. Αν $f(x) = \left|\frac{1}{2-x}\right|$, με $x \neq 2$ τότε, για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση



Σχήμα 1.38: Η γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \ln(x+1)$

της f πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα[33]:

1. σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{x}$,
2. σχεδιάζοντας τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $-\frac{1}{x}$, δηλαδή της $\frac{1}{-x}$,
3. με μία οριζόντια μετατόπιση προς τα δεξιά κατά 2 παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{-(x-2)}$, δηλαδή τη γραφική παράσταση της $\frac{1}{2-x}$, και, τέλος,
4. σχεδιάζοντας και τη συμμετρική της $\frac{1}{2-x}$ ως προς τον άξονα $x'x$ και κρατώντας τα τμήματα που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $\left|\frac{1}{-(x-2)}\right|$, δηλαδή της f.

Όλα αυτά φαίνονται, διαδοχικά, στο σχήμα 1.39.

$\square$

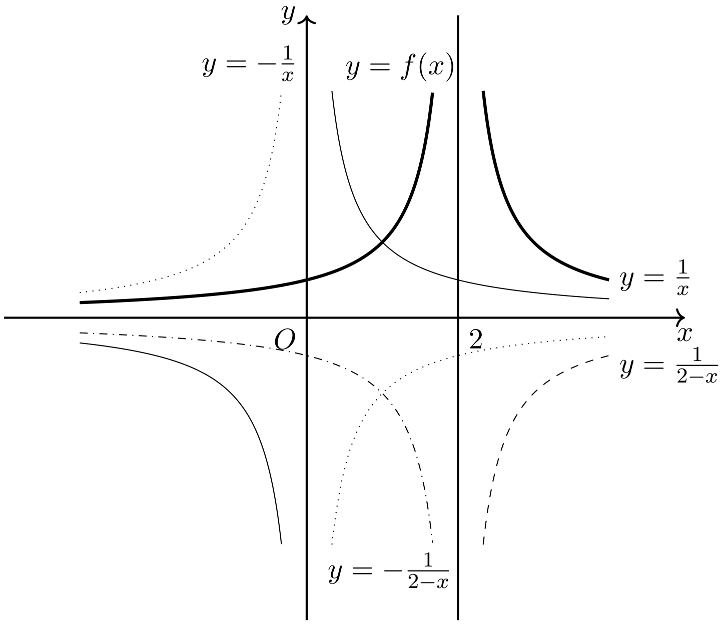
Παράδειγμα 1.16. Αν $f(x) = 2 - \sqrt{1+|x|}$, με $x \in \mathbb{R}$, τότε, για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση της f πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα:

1. σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\sqrt{x}$,
2. με μία μετατόπιση κατά 1 προς τα αριστερά σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\sqrt{x-(-1)}$, δηλαδή της $\sqrt{x+1}$,
3. σχεδιάζοντας τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $x'x$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $-\sqrt{x+1}$,
4. με μία κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 προς τα πάνω παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $2 - \sqrt{x+1}$ και, τέλος,

[33]Ίσως μας βοηθήσει να γράψουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$f(x) = \left|\frac{1}{-(x-2)}\right|$$

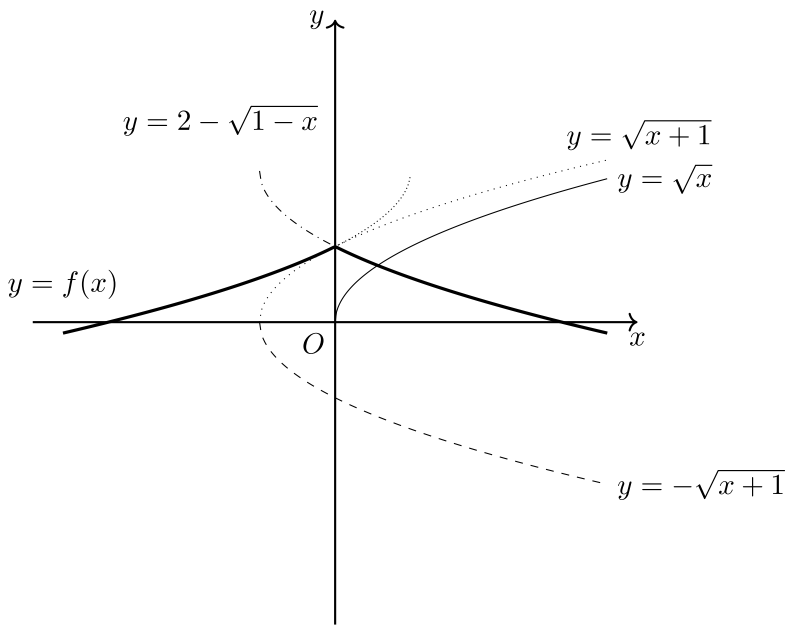
έτσι ώστε να φαίνεται η οριζόντια μεταφορά κατά 2 προς τα δεξιά.



Σχήμα 1.39: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \left|\frac{1}{2-x}\right|$

5. σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της $2 - \sqrt{1-x}$ και κρατώντας, αν $x \geq 0$ τη γραφική παράσταση της $2 - \sqrt{1+x}$ και αν $x < 0$ τη γραφική παράσταση της $2 - \sqrt{1-x}$ παίρνουμε τη γραφική παράσταση της $2 - \sqrt{1+|x|}$, δηλαδή της $f(x)$.

Όλα αυτά φαίνονται, διαδοχικά, στο σχήμα 1.40.



Σχήμα 1.40: Η γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \sqrt{1+|x|}$

□

Παρατήρηση 1.8. Στη συνέχεια της ύλης θα ασχοληθούμε, ως επί το πλείστον, με συναρτήσεις των οποίων το πεδίο ορισμού θα είναι είτε διάστημα είτε ένωση διαστημάτων.

□

1.2.5 Συμμετρικές συναρτήσεις — Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Υπάρχουν κάποιες ειδικές κατηγορίες συναρτήσεων οι οποίες μας απασχολούν συχνά λόγω κάποιων ιδιαίτερων χαρακτηριστικών. Δύο εξ αυτών είναι οι άρτιες και οι περιττές συναρτήσεις, οι οποίες έχουν και οι δύο γραφικές παράστασεις με κάποια μορφή συμμετρίας.

Άρτιες συναρτήσεις

Ορισμός 1.8: Άρτια συνάρτηση

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται άρτια αν:

1. το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το 0, δηλαδή, για κάθε $x \in A$ έχουμε και $-x \in A$ και
2. για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:
$$f(-x) = f(x).$$

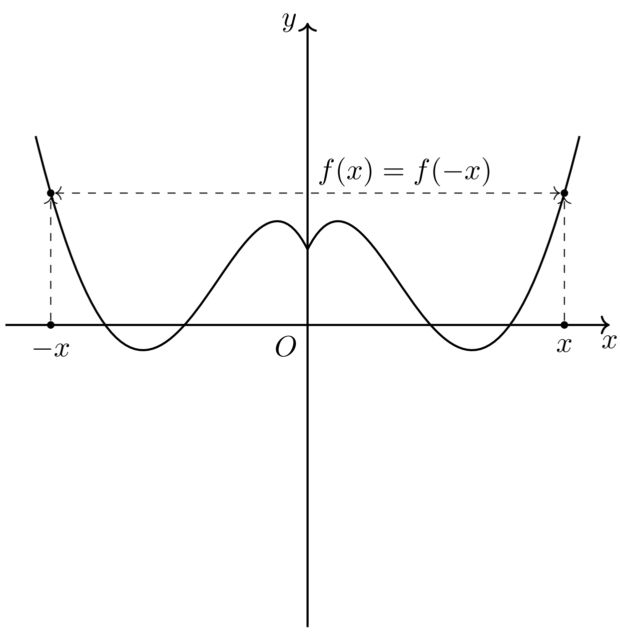
Για παράδειγμα, μία άρτια συνάρτηση είναι η $f(x) = x^2$. Μάλιστα, οι άρτιες συναρτήσεις οφείλουν το όνομά τους σε αυτήν την συνάρτηση και στις «εξαδέλφες» της, τις $f(x) = x^\nu$, όπου ν άρτιος (ζυγός) αριθμός. Εν γένει, μία συνάρτηση που είναι άρτια έχει την εξής ιδιότητα:

$$f(x) = f(|x|)$$

καθώς, αν $x \geq 0$ τότε $|x| = x$, ενώ αν $x < 0$ τότε έχουμε $|x| = -x$ και, αφού η f είναι άρτια:

$$f(|x|) = f(-x) = f(x).$$

Εποπτικά, αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f, εφ' όσον συμπίπτει με την $f(|x|)$, είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.41.



Σχήμα 1.41: Μία άρτια συνάρτηση

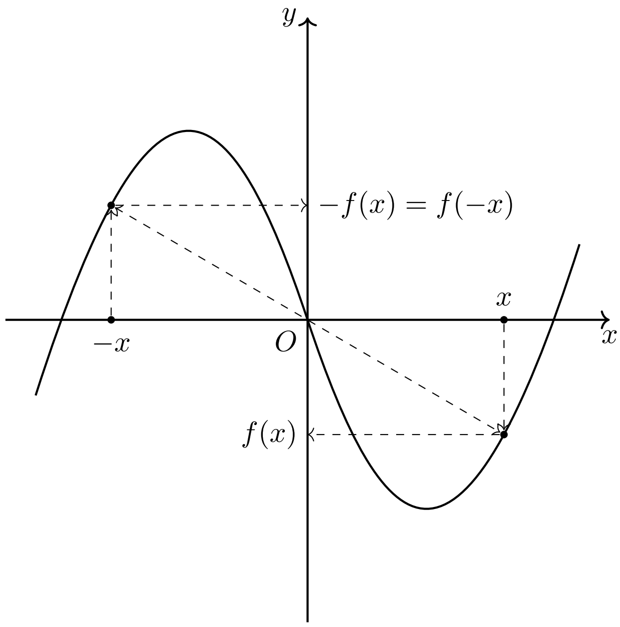
Περιττές συναρτήσεις

Ορισμός 1.9: Περιττή συνάρτηση

ία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται περιττή αν:

1. το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το 0, δηλαδή, για κάθε $x \in A$ έχουμε και $-x \in A$ και
2. για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:
$$f(-x) = -f(x).$$

Για παράδειγμα, μία περιττή συνάρτηση είναι η $f(x) = x^3$. Μάλιστα, όπως και με τις άρτιες συναρτήσεις, έτσι και οι περιττές οφείλουν τον όνομά της σε αυτήν και τις «εξαδέλφες» της, τις $f(x) = x^\nu$, όπου ν περιττός (μονός) αριθμός. Σε ό,τι αφορά τις περιττές συναρτήσεις, δεν έχουμε συμμετρία ως προς κάποιον άξονα, αλλά κεντρική συμμετρία, δηλαδή συμμετρία ως προς κάποιο σημείο (κέντρο). Μάλιστα, το κέντρο συμμετρίας κάθε περιττής συνάρτησης είναι η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.42.



Σχήμα 1.42: Μία περιττή συνάρτηση

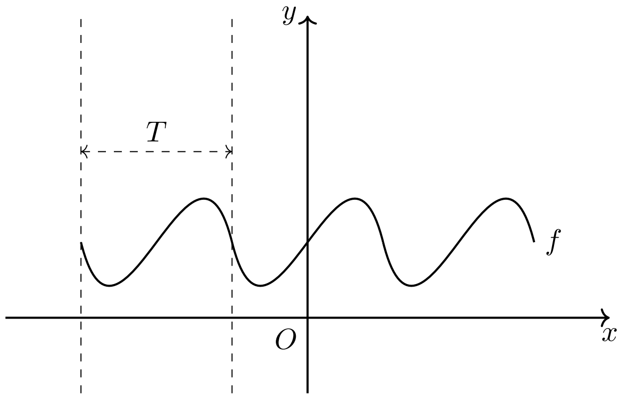
Παρατήρηση 1.9. Να παρατηρήσουμε ότι αναγκαία συνθήκη[34] για να είναι μία συνάρτηση περιττή είναι να ισχύει ότι $f(0) = 0$, αν φυσικά το 0 είναι σημείο του πεδίου ορισμού της. Πράγματι, αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:
$$f(-x) = -f(x)$$
τότε, για $x = 0$ παίρνουμε:
$$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

□

[34] Αναγκαία λέγεται μία συνθήκη για ένα γεγονός αν, όταν αυτή η συνθήκη δεν ισχύει, δεν πραγματοποιείται ούτε το εν λόγω γεγονός. Για παράδειγμα, αναγκαία συνθήκη για να φάει κάποιος είναι να έχει φαγητό.

1.2.6 Περιοδικές συναρτήσεις

Διάφορα φαινόμενα στην φύση επαναλαμβάνονται με συγκεκριμένο τρόπο κατά ορισμένα χρονικά διαστήματα, όπως, π.χ. η περιφορά της Γης γύρω από τον ήλιο, η περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της, η ταλάντωση μίας κούνιας σε μία παιδική χαρά κ.α.. Όλα αυτά τα φαινόμενα και όλες αυτές οι κινήσεις μπορούν να περιγραφούν από συναρτήσεις που «μιμούνται» αυτήν την περιοδικότητα, παίρνοντας, ανά κάποια διαστήματα, τις ίδιες τιμές, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.43. Προχωράμε τώρα στον τυπικό ορισμό μιας περιοδικής συνάρτησης.



Σχήμα 1.43: Μία περιοδική συνάρτηση

Ορισμός 1.10: Περιοδική συνάρτηση

ία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται $T-$περιοδική αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x+T) = f(x).$$

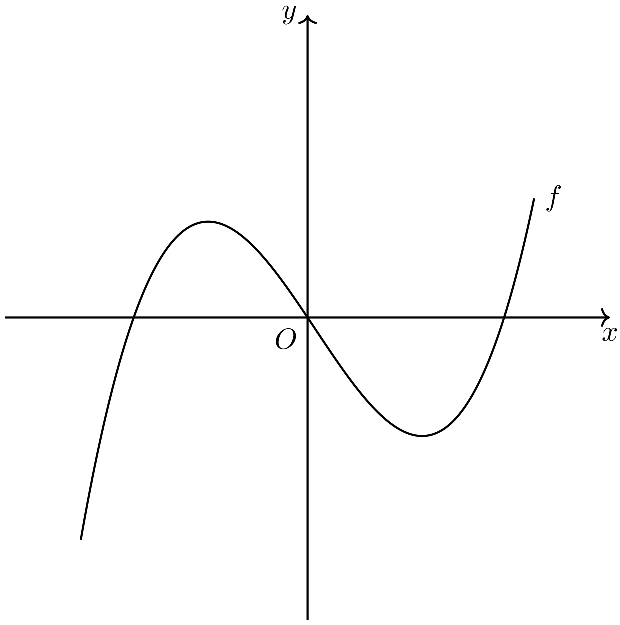
Τέτοιες συναρτήσεις είναι επίσης όλες οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις (ημ x, συν x κ.λπ.).

1.3 Μονοτονία και ακρότατα συναρτήσεων

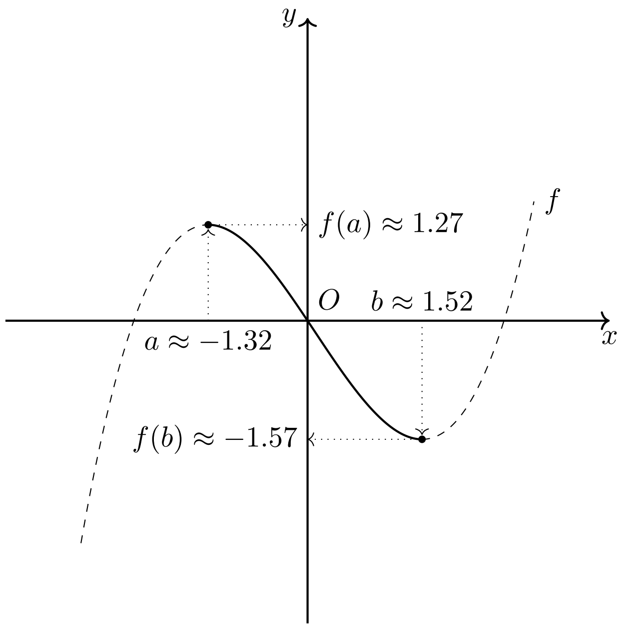
Ας παρατηρήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που φαίνεται στο σχήμα 1.44. Βλέπουμε ότι υπάρχουν διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης, «διασχίζοντάς» την από αριστερά προς τα δεξιά, «ανεβαίνει» ενώ σε άλλα διαστήματα «κατεβαίνει», όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.45. Επίσης, παρατηρούμε ότι στο σημείο $(a, f(a))$ η f σταματάει να «ανεβαίνει» και αρχίζει να «κατεβαίνει» ενώ στο σημείο $(b, f(b))$ συμβαίνει το αντίθετο: η f σταματάει την κάθοδό της και αρχίζει να «ανεβαίνει» ξανά. Όλα αυτά θα τα μελετήσουμε με αυστηρούς μαθηματικούς όρους σε αυτήν την ενότητα.

1.3.1 Μονοτονία συναρτήσεων

Πώς θα μπορούσαμε να εκφράσουμε με μαθηματικούς όρους το γεγονός ότι η συνάρτηση f του σχήματος 1.45 «ανεβαίνει» στο διάστημα $[b, +\infty)$ καθώς κινούμαστε από αριστερά προς τα δεξιά; Ας απομονώσουμε αυτό το τμήμα, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.46. Παρατηρούμε ότι, αν διαλέξουμε δύο αριθμούς x_1 και x_2 στο $[b, +\infty)$ έτσι ώστε $x_1 < x_2$, δηλαδή αν το x_2 είναι δεξιότερα του x_1, τότε, αφού η γραφική παράσταση της f ανεβαίνει από τα αριστερά προς τα δεξιά, πρέπει η τιμή $f(x_2)$



Σχήμα 1.44: Η συνάρτηση f



Σχήμα 1.45: Μονοτονία και ακρότατα της συνάρτησης f

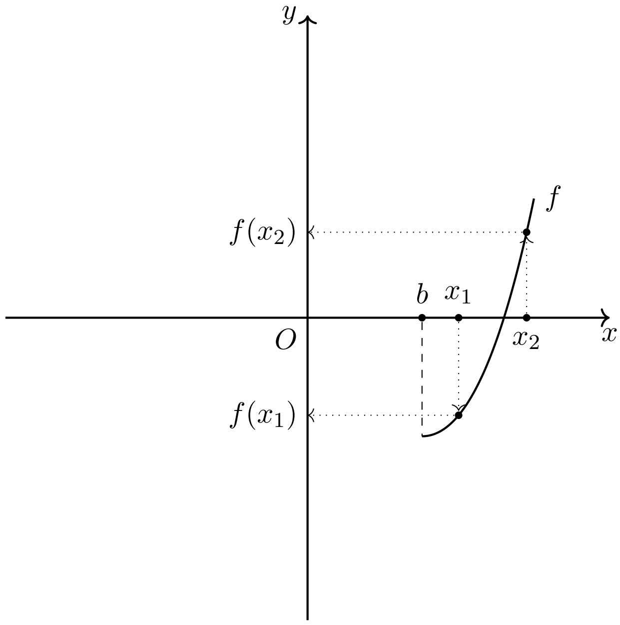
να είναι μεγαλύτερη από την τιμή $f(x_1)$. Επομένως, η εποπτική εικόνα που έχουμε μεταφράζεται στο εξής:

Για κάθε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Αυτήν ακριβώς την ιδέα παίρνουμε και ορίζουμε τις γνησίως αύξουσες[35] συναρτήσεις.

[35] Δηλαδή αυτές που ανεβαίνουν.



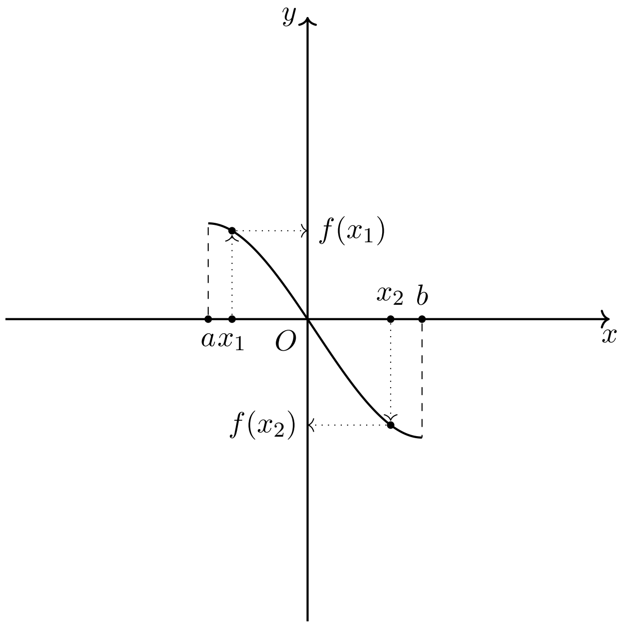
Σχήμα 1.46: Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[b, +\infty)$

Ορισμός 1.11: Γνησίως αύξουσα συνάρτηση

ία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι γνησίως αύξουσα **σε ένα διάστημα** Δ του πεδίου ορισμού της αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Ανάλογα μπορούμε να περιγράψουμε και το γεγονός ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f κατεβαίνει στο διάστημα $[a, b]$ καθώς κινούμαστε από τα αριστερά προς τα δεξιά. Επιλέγουμε $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $x_1 < x_2$ και, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.47, ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$, αφού, κινούμενοι από αριστερά προς τα δεξιά, η γραφική παράσταση της συνάρτησης κατεβαίνει. Έτσι,



Σχήμα 1.47: Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, b]$

φυσιολογικά, δίνουμε τον επόμενο ορισμό για της γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις.

Ορισμός 1.12: Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

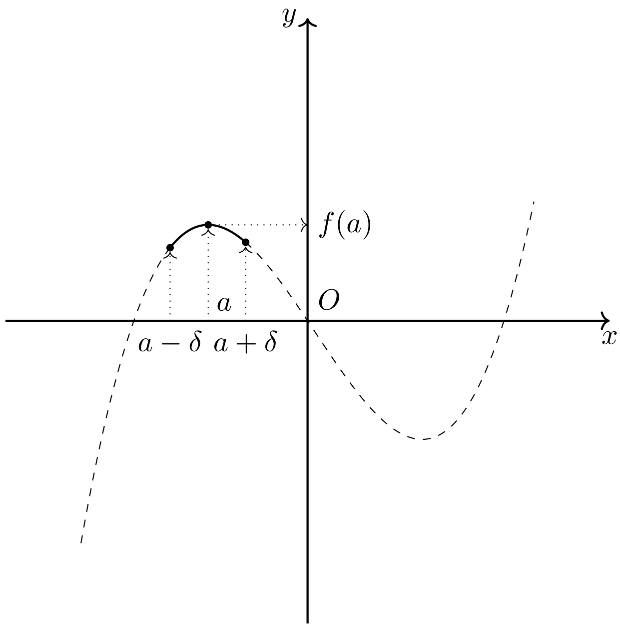
ία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα **σε ένα διάστημα** Δ του πεδίου ορισμού της αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι:

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Τέλος, θα λέμε ότι μία συνάρτηση είναι *γνησίως μονότονη* αν είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα.

1.3.2 (Τοπικά) ακρότατα συνάρτησης

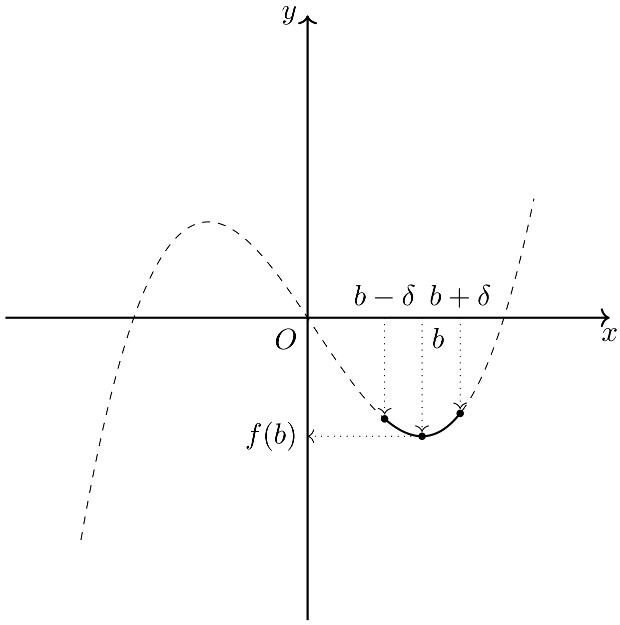
Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.44, υπάρχουν δύο σημεία, τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ (όπου $a \approx -1.32$, $b \approx 1.52$, $f(a) \approx 1.27$ και $f(b) \approx -1.57$) τα τα οποία έχουν πιο «ξεχωριστές» θέσεις στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Πιο συγκεκριμένα, αν περιοριστούμε «κοντά» στο a τότε παρατηρούμε, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.48, ότι η συνάρτηση δεν παίρνει τιμές μεγαλύτερες από το $f(a) \approx 1.27$. Αντίστοιχα, αν περιοριστούμε «κοντά» στο b τότε παρατηρούμε, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.49, ότι η συνάρτηση δεν παίρνει τιμές μικρότερες από το $f(b) \approx -1.57$. Το ζήτημα είναι πώς θα ερμηνεύσει κανείς, στη γλώσσα



Σχήμα 1.48: Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο a, το $f(a)$.

των μαθηματικών, την έννοια του «κοντά»[36]; Το «κοντά» στα μαθηματικά, δεδομένου ότι δεν υπάρχει σαφές πλαίσιο αναφοράς, όπως στην καθημερινή ζωή, δεν μπορεί να οριστεί με βάση κάποια μονάδα. Για παράδειγμα, λέμε ότι κάποιος είναι κοντά στην Αθήνα, ταξιδεύοντας με το αμάξι αν έχει περάσει, λ.χ. την Ελευσίνα, αλλά, προφανώς, δεν μπορούμε να λέμε στα μαθηματικά ότι κοντά είναι ότι απέχει λιγότερο από, π.χ. 1. Έτσι, η έννοια του «κοντά», άρα και γενικότερα η έννοια της τοπικότητας, στα μαθηματικά, είναι, εν γένει αυθαίρετη. Θα λέμε λοιπόν ότι μία ιδιότητα ισχύει «κοντά σε ένα αριθμό x» αν υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ έτσι ώστε αυτή η ιδιότητα να ισχύει στο

[36] Δε θα ήταν υπερβολή να λέγαμε ότι, αυτή η έννοια του κοντά είναι αυτή που μας θα μας απασχολήσει σε όλη την έκταση της ύλης από εδώ και έπειτα.



Σχήμα 1.49: Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο b, το $f(b)$.

διάστημα $(x-\delta, x+\delta)$. Ας προσέξουμε ότι το δ μπορεί να είναι όσο μικρό ή μεγάλο θέλουμε, αρκεί να είναι θετικό και όχι μηδέν. Ας προσέξουμε επίσης ότι αν μία ιδιότητα ισχύει σε ένα διάστημα $(x-\delta, x+\delta)$, τότε, προφανώς ισχύει και πιο «κοντά» στο x, δηλαδή αν $\delta' < \delta$, τότε η ίδια ιδιότητα θα ισχύει και στο $(x-\delta', x+\delta')$.

Με αυτά κατά νου, προχωράμε στον ορισμό της έννοιας του τοπικού μεγίστου[37].

Ορισμός 1.13: Τοπικό μέγιστο

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0 \in A$ αν υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε, για κάθε $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$ ισχύει ότι:

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Το $f(x_0)$ το ονομάζουμε *τοπικό μέγιστο* της συνάρτησης f.

Ανάλογα, δίνουμε και τον ορισμό του τοπικού ελαχίστου.

Ορισμός 1.14: Τοπικό μέγιστο

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 \in A$ αν υπάρχει ένα $\delta > 0$ έτσι ώστε, για κάθε $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$ ισχύει ότι:

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Το $f(x_0)$ το ονομάζουμε *τοπικό ελάχιστο* της συνάρτησης f.

Παρατήρηση 1.10. Μία συνάρτηση μπορεί να έχει περισσότερα από ένα τοπικά ελάχιστα και περισσότερα από ένα τοπικά μέγιστα. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}\, x$ έχει *άπειρα* τοπικά ελάχιστα και *άπειρα* τοπικά μέγιστα.

[37] Στον ορισμό, όπως θα δείτε, δεν λέμε απλώς $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ διότι αυτό θα μας εξασφάλιζε μόνο το «κοντά». Εμείς, εκτός από κοντά στο x_0, θέλουμε να είμαστε και μέσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, για να έχει νόημα το σύμβολο $f(x)$.

□

Τέλος, υπάρχει και η έννοια του ολικού ακροτάτου ή οποία αντιστοιχεί σε συναρτήσεις όπου κάποιο από τα τοπικά ακρότατα αποτελεί και μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Επομένως, οι αντίστοιχοι ορισμοί είναι οι εξής:

Ορισμός 1.15: Ολικό μέγιστο

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $x_0 \in A$ για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Το $f(x_0)$ το ονομάζουμε *ολικό μέγιστο* της συνάρτησης f.

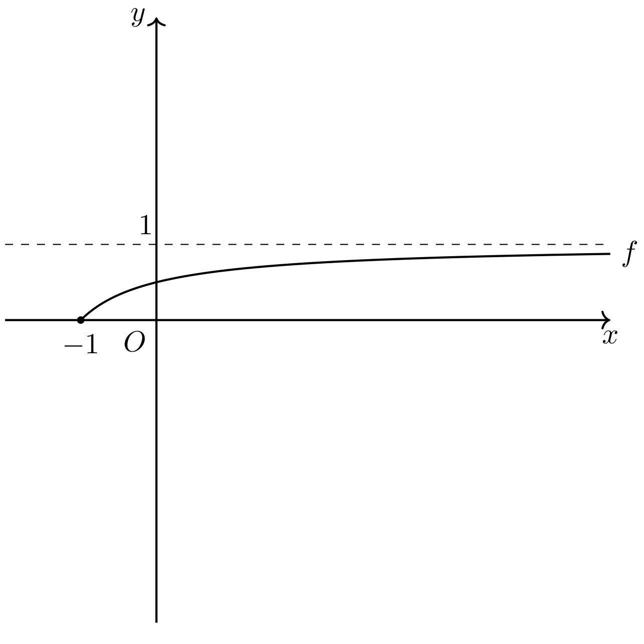
Ορισμός 1.16: Ολικό ελάχιστο

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 \in A$ για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Το $f(x_0)$ το ονομάζουμε *ολικό ελάχιστο* της συνάρτησης f.

Παρατήρηση 1.11. Ας δούμε τη συνάρτηση $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$ με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.50. Παρατηρούμε, αρχικά, ότι η f παρουσιάζει



Σχήμα 1.50: Η συνάρτηση f

ολικό ελάχιστο στο -1, το $f(-1) = 0$. Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [-1, +\infty)$ ισχύει ότι:

$$f(x) < 1$$

και, η f «πλησιάζει απεριόριστα»[38] την ευθεία $y = 1$, άρα οι τιμές της πλησιάζουν όσο θέλουμε την τιμή 1. Ωστόσο, δεν υπάρχει κάποιος αριθμός $x_0 \in [-1, +\infty)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 1$, επομένως

[38] Αυτή η έννοια θα μας απασχολήσει επίσης σε όλη σχεδόν την έκταση της ύλης.

η f **δεν** παρουσιάζει ολικό μέγιστο σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της, ακόμα και αν όλες οι τιμές της f είναι μικρότερες από το 1.

□

Αν μας έχει δοθεί η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης, είναι αρκετά εύκολο να εντοπίσουμε τα ακρότατα και τα διαστήματα στα οποία αυτή είναι μονότονη, όμως, δεδομένου ότι δεν έχουμε ακόμα τη δυνατότητα να σχεδιάσουμε με ακρίβεια τη γραφική παράσταση αρκετών συναρτήσεων, θα παραθέσουμε μερικά παραδείγματα στα οποία βρίσκουμε τα παραπάνω στοιχεία χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον τύπο της συνάρτησης και τους ορισμούς που δώσαμε παραπάνω.

Παράδειγμα 1.17. Αν $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$, με $x \in (2, +\infty)$, τότε, για την μονοτονία της f έχουμε, αν $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1 - 2} < \sqrt{x_2 - 2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1 - 2}} > \frac{1}{\sqrt{x_2 - 2}} \\ &\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x_1 - 2}} > \frac{2}{\sqrt{x_2 - 2}} \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

επομένως, αφού έχουμε ότι:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$.

□

Παράδειγμα 1.18. Αν $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$, με $x \in \mathbb{R}$, τότε, για την μονοτονία της f έχουμε, αν $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \tag{1}$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5 \tag{2}$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \tag{3}$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) κατά μέλη έχουμε:

$$x_1^5 + x_1^3 + x_1 + 1 < x_2^5 + x_2^3 + x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

□

Παράδειγμα 1.19. Αν $f(x) = \ln(1 + x^2)$, με $x \in \mathbb{R}$ τότε, για την μονοτονία της f πρέπει να είμαστε πρώτα λίγο προσεκτικοί. Αν ξεκινήσουμε όπως πριν και πάρουμε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε δεν μπορούμε να πάμε και πολύ παρακάτω, διότι η συνεπαγωγή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$$

δεν είναι αληθής για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (πάρτε, για παράδειγμα $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$). Επίσης, δεν ισχύει ούτε η συνεπαγωγή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	Ολ. Ελ.	$\nearrow$	

Πίνακας 1.1: Η μονοτονία και τα ακρότατα της f.

οπότε δεν μπορούμε να προχωρήσουμε όπως πριν, «χτίζοντας» τον τύπο της f. Είμαστε όμως αρκετά τυχεροί έτσι ώστε να ισχύουν οι δύο ακόλουθες ανισότητες[39]:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in [0, +\infty)$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in (-\infty, 0].$$

Επομένως, μπορούμε να εργαστούμε ξεχωριστά στα δύο διαστήματα $[0, +\infty)$ και $(-\infty, 0]$. Έστω, λοιπόν, πρώτα $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \\ &\Rightarrow 1 + x_1^2 < 1 + x_2^2 \\ &\Rightarrow \ln(1 + x_1^2) < \ln(1 + x_2^2) \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Έστω τώρα $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$. Τότε, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \\ &\Rightarrow 1 + x_1^2 > 1 + x_2^2 \\ &\Rightarrow \ln(1 + x_1^2) > \ln(1 + x_2^2) \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Εδώ, μπορούμε, επιπρόσθετα, να έχουμε και ένα συμπέρασμα για τα ακρότατα της f. Ξεκινώντας από τη γνωστή ανισότητα $x^2 \geq 0$, έχουμε, διαδοχικά:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + x^2 \geq 1 \Rightarrow \ln(1 + x^2) \geq \ln 1 = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0.$$

Επειδή, τώρα, $f(0) = 0$, έχουμε ότι:

$$f(x) \geq f(0)$$

άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0, το $f(0) = 0$. Όλα αυτά μπορούμε να τα αναπαραστήσουμε και σε έναν πίνακα όπως ο πίνακας 1.1

□

[39]Για την απόδειξή τους μπορείτε είτε να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμών είτε να παρατηρήσετε ότι και οι δύο προκύπτουν άμεσα από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$.

Παράδειγμα 1.20. Αν $f(x) = \frac{\text{συν}^2 x}{1+\text{συν}^2 x}$ με $x \in \mathbb{R}$, τότε, δεν μπορούμε να πούμε κάτι για τη μονοτονία της f με σχετική ευκολία[40], μπορούμε όμως να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, ας ξαναγράψουμε τον τύπο της συνάρτησης f ως εξής:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\text{συν}^2 x}{1+\text{συν}^2 x} = \frac{1+\text{συν}^2 x - 1}{1+\text{συν}^2 x} = \\ &= \frac{1+\text{συν}^2 x}{1+\text{συν}^2 x} - \frac{1}{1+\text{συν}^2 x} = 1 - \frac{1}{1+\text{συν}^2 x}. \end{aligned}$$

Τώρα, από τις ανισότητες $y^2 \geq 0$ και $\text{συν}\, x \leq 1$ παίρνουμε την ακόλουθη διπλή ανισότητα:

$$0 \leq \text{συν}^2 x \leq 1$$

οπότε, διαδοχικά, έχουμε:

$$\begin{aligned} & 0 \leq \text{συν}^2 x \leq 1 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \leq 1 + \text{συν}^2 x \leq 2 \\ \Leftrightarrow\ & 1 \geq \frac{1}{1+\text{συν}^2 x} \geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & -1 \leq -\frac{1}{1+\text{συν}^2 x} \leq -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 1-1 \leq 1 - \frac{1}{1+\text{συν}^2 x} \leq 1 - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Επειδή, τώρα, $f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1+0} = 0$, έχουμε ότι:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) \leq f(0)$$

οπότε, από την πρώτη ανισότητα παίρνουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\frac{\pi}{2}$, το 0, ενώ από τη δεύτερη ανισότητα παίρνουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0, το $\frac{1}{2}$.

□

1.4 Συναρτήσεις 1-1 — Αντίστροφη συνάρτηση

Περιγράψαμε μία συνάρτηση $f : A \to B$ σαν μία διαδικασία, μία αντιστοίχιση ανάμεσα σε δύο σύνολα που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο του συνόλου A σε **ένα και μοναδικό** στοιχείο του συνόλου B. Κανείς όμως δε μας εγγυάται ότι κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται και σε ένα *διαφορετικό* στοιχείο του συνόλου B. Με άλλα λόγια, για κάθε συνάρτηση ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

αλλά δεν ικανοποιούν όλες οι συναρτήσεις τη συνεπαγωγή:

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν έχει αυτήν την ιδιότητα, μιας και:

$$f(-1) = f(1) = 1.$$

[40] Αν θέλει κάποιος μπορεί να αξιοποιήσει την μονοτονία της συνάρτησης $\text{συν}\, x$ στα διαστήματα $[0, \pi]$ και $[\pi, 2\pi]$ καθώς και το πρόσημο της συνάρτησης $\text{συν}\, x$ και να προσπαθήσετε να «χτίσετε» τον τύπο της f.

Υπάρχουν άραγε συναρτήσεις για τις οποίες να ισχύει αυτή η συνεπαγωγή; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι θετική και κανείς το βλέπει αυτό παίρνοντας σαν παράδειγμα τη συνάρτηση $f(x) = x$, για την οποία η συνεπαγωγή ισχύει προφανώς.

Αυτές τις συναρτήσεις που στέλνουν κάθε ένα στοιχείο του A σε ένα διαφορετικό στοιχείο του B τις ονομάζουμε 1-1. Δίνουμε και τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό αυτής της έννοιας που θα είναι το κεντρικό αντικείμενο αυτής της ενότητας:

Ορισμός 1.17: 1-1 συνάρτηση

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται 1-1 αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Ομολογουμένως, όλες οι μαθηματικές προτάσεις που έχουν μέσα τους το σύμβολο του $\neq$ ή, γενικά, κάποιου είδους άρνηση, είναι πιο δύσχρηστες, για αυτό και συχνά καταφεύγουμε σε ένα λογικό τέχνασμα, αυτό της *αντιθετοαντιστροφής*. Γενικότερα, αν έχουμε μία πρόταση της μορφής:

$$A \Rightarrow B$$

τότε αυτή είναι ισοδύναμη με την αντιθετοαντίστροφή της, η οποία είναι η:

$$\text{όχι } B \Rightarrow \text{όχι } A.$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα, για να το αποσαφηνίσουμε. Θεωρούμε την πρόταση[41]:

Αν βρέξει τότε θα πάρω ομπρέλα

η οποία είναι της μορφής $A \Rightarrow B$. Αυτό σημαίνει ότι, αν δεν έχει βρέξει, τότε δε θα έχω πάρει ομπρέλα, άρα, είναι ισοδύναμο με την πρόταση:

Αν **δεν** βρέχει τότε **δεν** θα έχω πάρει ομπρέλα,

η οποία είναι ακριβώς η πρόταση «όχι $B \Rightarrow$ όχι A».

Επιστρέφοντας στις 1-1 συναρτήσεις, η πολύ χρήσιμη αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή του ορισμού της 1-1 συνάρτησης είναι η ακόλουθη (την παραθέτουμε σαν «εναλλακτικό ορισμό» και θα χρησιμοποιούμε αυτήν τη μορφή κυρίως).

Πρόταση 1.1: Αντιθετόαντίστροφος του ορισμού της 1-1 συνάρτησης

Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται 1-1 αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Παράδειγμα 1.21. Αν $f(x) = \ln(2x+3)$, $x > -\frac{3}{2}$, τότε η f είναι 1-1. Πράγματι, αν $x, y > -\frac{2}{3}$ με $f(x) = f(y)$ τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Leftrightarrow \ln(2x+3) = \ln(2y+3) \\ &\Leftrightarrow e^{\ln(2x+3)} = e^{\ln(2y+3)} \\ &\Leftrightarrow 2x+3 = 2y+3 \\ &\Leftrightarrow 2x = 2y \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

[41] Συνηθίζουμε την λογική συνεπαγωγή $\Rightarrow$ να τη μεταφράζουμε στην καθημερινή μας γλώσσα ως «Αν... τότε...».

άρα, από το αντιθετοαντίστροφο του ορισμού, η f είναι 1-1.

□

Παραθέτουμε τώρα, μία πολύ σημαντική πρόταση για το πότε μία συνάρτηση είναι[42] 1-1.

Πρόταση 1.2

Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, όπου Δ είναι κάποιο διάστημα, είναι 1-1.

Απόδειξη. Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας[43] ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω επίσης, προς άτοπο, ότι η f δεν είναι 1-1. Δηλαδή, υπάρχουν δύο αριθμοί $x, y \in A$ με $x \neq y$ αλλά $f(x) = f(y)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. αν $x < y$, τότε, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα πρέπει να έχουμε $f(x) < f(y)$, άτοπο,
2. αν $x > y$, τότε, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα πρέπει να έχουμε $f(x) > f(y)$, άτοπο.

Άρα, σε κάθε περίπτωση καταλήξαμε σε αντίφαση με την υπόθεσή μας, επομένως αυτή δεν ισχύει και ισχύει το αντίθετο, δηλαδή ότι η f είναι 1-1.

□

1.4.1 Εποπτική ερμηνεία της 1-1 ιδιότητας

Πώς αναγνωρίζουμε μία 1-1 συνάρτηση από τη γραφική της παράσταση; Έχουν κάτι το ιδιαίτερο αυτές οι συναρτήσεις που να τους δίνει μία ξεχωριστή μορφή; Και σε αυτό το ερώτημα η απάντηση είναι καταφατική. Ας σκεφτούμε λίγο. Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης αποτελείται από όλα τα σημεία της μορφής $(x, f(x))$. Τι σημαίνει ότι αν $x \neq y$ τότε και $f(x) \neq f(y)$ εποπτικά. Σημαίνει ότι αυτά τα σημεία δεν μπορούν να βρίσκονται και τα δύο σε μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, διότι τότε, θα έπρεπε η κλίση αυτής της ευθείας να είναι 0, δηλαδή:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0 \Leftrightarrow f(y) = f(x)$$

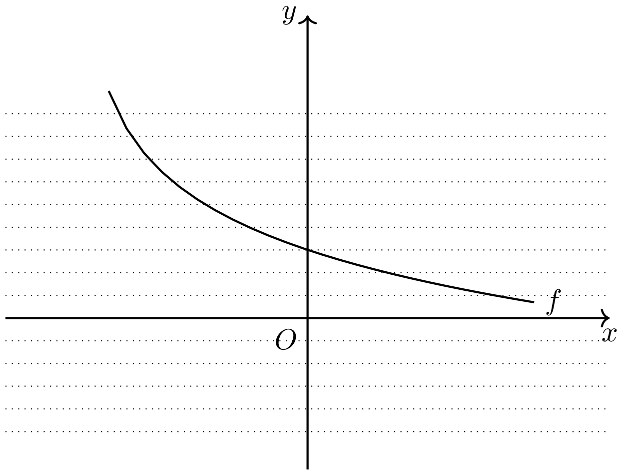
που είναι άτοπο. Άρα, δεν υπάρχουν δύο σημεία της γραφικής παράστασης της f που να βρίσκονται στην ίδια παράλληλη ευθεία με τον $x'x$ ή, ισοδύναμα *κάθε ευθεία της μορφής $y = c$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f* ***το πολύ*** *σε ένα σημείο!* Το τελευταίο είναι εμφανές στο σχήμα 1.51.

1.4.2 Αντίστροφη συνάρτηση

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία 1-1 συνάρτηση. Αν θεωρήσουμε την $f : A \to f(A)$, δηλαδή αν αντί για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, πάρουμε ακριβώς το σύνολο τιμών της f, τότε, προφανώς, δεν αλλάζει κάτι, παρά μόνο το ότι ίσως να «πετάμε» έξω κάποια στοιχεία του $\mathbb{R}$ και, για την ακρίβεια, «πετάμε» όσους αριθμούς δεν είναι τιμές της συνάρτησης f. Αν πάρουμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ και, αντ' αυτού γράφουμε $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, δεν άλλαξε τίποτα, γιατί,

[42] Προς το παρόν, το να δείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη είναι εξίσου δύσκολο με το να δείξουμε ότι μία συνάρτηση είναι 1-1. Ωστόσο, αργότερα θα έχουμε αναπτύξει αρκετά εργαλεία που θα κάνουν την εύρεση της μονοτονίας μίας συνάρτησης αρκετά ευκολότερη.

[43] Και ποιος την έβλαψε τη γενικότητα; Όταν λέμε στα μαθηματικά «χωρίς βλάβη της γενικότητας», εννοούμε ότι το να διαλέξουμε ένα από πολλά ενδεχόμενα δεν επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο κάνουμε την απόδειξή μας. Αν, ας πούμε, έπρεπε να κάνουμε κάτι άλλο για την περίπτωση που η f ήταν γνησίως φθίνουσα τότε δεν θα μπορούσαμε να το πούμε αυτό (ναι, αλλά αφού δεν μπαίνουμε στον κόπο να δούμε τι γίνεται, πού ξέρουμε ότι δε χρειάζεται κάτι διαφορετικό;).



Σχήμα 1.51: Μία 1-1 συνάρτηση

ούτως ή άλλως $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα οι αριθμοί που «πετάξαμε» (όλοι οι αρνητικοί), ούτως ή άλλως δεν ανήκαν στο σύνολο τιμών της f.

Θεωρώντας λοιπόν μία συνάρτηση $f : A \to f(A)$ η οποία είναι 1-1, παρατηρούμε ότι **για κάθε** $y \in f(A)$ υπάρχει ένα[44] $x \in A$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$ και, αφού η f είναι ένα προς ένα, αυτό είναι και **μοναδικό**. Μας θυμίζει κάτι αυτό; Μα, αυτός δεν είναι ο ορισμός μίας συνάρτησης $g : f(A) \to A$ η οποία «στέλνει» κάθε $y \in f(A)$ στο μοναδικό x για το οποίο ισχύει $y = f(x)$; Αυτήν ακριβώς τη συνάρτηση την ονομάζουμε *αντίστροφη συνάρτηση της* f και τη συμβολίζουμε με[45] f^{-1}. Ακολουθεί και ο τυπικός μαθηματικός ορισμός.

Ορισμός 1.18: Αντίστροφη συνάρτηση

Αν $f : A \to f(A)$ είναι μία 1-1 συνάρτηση, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση $f^{-1} : f(A) \to A$ να είναι η συνάρτηση που αντιστοιχίζει κάθε $y \in f(A)$ στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$ και γράφουμε:

$$f^{-1}(y) = x.$$

Αυτή η συνάρτηση λέγεται *αντίστροφη της* f και η f σε αυτήν την περίπτωση λέγεται *αντιστρέψιμη*.

Παρατήρηση 1.12. Το να είναι η f 1-1 είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη. Με άλλα λόγια, μία συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη αν και μόνον αν είναι και 1-1. Το ότι αν είναι 1-1 μία συνάρτηση τότε ορίζεται και η αντίστροφή της, μόλις το είδαμε. Αν, τώρα, μία συνάρτηση δεν είναι 1-1, τότε δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε το μονοσήμαντο που απαιτείται για να ορίσουμε την f^{-1} και, ως εκ τούτου, δεν είναι αντιστρέψιμη.

□

Παρατήρηση 1.13. Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης είδαμε ότι αυτή αντιστοιχίζει κάθε $y \in f(A)$ στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει ότι

$$y = f(x)$$

δηλαδή:

$$f^{-1}(y) = x.$$

Αντικαθιστώντας όπου y το $f(x)$, παίρνουμε την ακόλουθη πολύ σημαντική σχέση:

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

[44] Αφού ανήκει στο σύνολο τιμών της f, πρέπει να είναι τιμή της f.
[45] Προσοχή! Προσοχή! Προσοχή! Καμμία σχέση δεν έχει, εν γένει, η $\frac{1}{f}$ με την f^{-1}. Καμμία! Καμμία!

Δηλαδή, η f^{-1} «αναιρεί» τη «δουλειά» που κάνει η f με το x και μας δίνει ξανά το x, πράγμα που δικαιολογεί και την ονομασία της.

Αντίστοιχα, αν στη σχέση:

$$f(x) = y$$

αντικαταστήσουμε όπου x το $f^{-1}(y)$, παίρνουμε την αντίστοιχη σχέση:

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

για κάθε $y \in f(A)$, που μας δείχνει ότι και η f «αναιρεί» τη ««δουλειά» που κάνει η f^{-1} με το y.

□

1.4.3 Εύρεση της αντίστροφης μίας συνάρτησης — Εύρεση συνόλου τιμών μίας συνάρτησης

Ωραία τα είπαμε, δώσαμε και τον ορισμό, αλλά στη βράση κολλάει το σίδερο. Μας δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2x+3)$, με $x > -\frac{3}{2}$ η οποία, όπως είδαμε παραπάνω, είναι 1-1, άρα είναι και αντριστρέψιμη. Ποια είναι η αντίστροφός της; Ποιος είναι, με άλλα λόγια, ο τύπος της και το πεδίο ορισμού της;

Ας σκεφτούμε λίγο το εξής: είπαμε ότι, αφού η f είναι 1-1, για κάθε $y \in f(A)$ υπάρχει ένα μοναδικό $x \in A$ τέτοιο ώστε[46]:

$$y = f(x).$$

Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μία μοναδική λύση $x \in A$ για κάθε $y \in f(A)$, η οποία, όπως είδαμε, είναι η $x = f^{-1}(y)$. Επομένως, ένας τρόπος να βρούμε τον τύπο της f^{-1} είναι να λύσουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x. Ας βρούμε τώρα την αντίστροφη της f. Η εξίσωση $y = f(x)$, στην περίπτωσή μας είναι η:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \ln(2x+3) \\ &\Leftrightarrow e^y = e^{\ln(2x+3)} \\ &\Leftrightarrow e^y = 2x+3 \\ &\Leftrightarrow e^y - 3 = 2x \\ &\Leftrightarrow \frac{e^y-3}{2} = x \end{aligned}$$

Δηλαδή, η αντίστροφη της f είναι η

$$f^{-1}(y) = \frac{e^y-3}{2}$$

ή, αν θέλουμε να έχουμε παντού x, για να μην μπερδευόμαστε, η:

$$f^{-1}(x) = \frac{e^x-3}{2}.$$

Σειρά έχει τώρα το πεδίο ορισμού της. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός που να προκύπτει από την τύπο της f^{-1}, επομένως το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση 1.14. Να παρατηρήσουμε ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1}, όπως την ορίσαμε, είναι ακριβώς το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το $f(A)$. Επομένως, ένας τρόπος για να βρίσκουμε το σύνολο τιμών μίας 1-1 συνάρτησης[47] είναι πρώτα να βρίσκουμε την αντίστροφη και, στη συνέχεια, να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της. Επίσης, ισχύει και η αντίστροφη σχέση, δηλαδή το πεδίο ορισμού της f είναι ακριβώς το σύνολο τιμών της f^{-1}.

□

[46] Εδώ το A είναι το διάστημα $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$, το πεδίο ορισμού της f, δηλαδή.
[47] Και μόνο σε αυτήν την περίπτωση!

Παράδειγμα 1.22. Αν $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, με $x \neq -1$, τότε η f είναι 1-1. Πράγματι, έστω $x, y \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ με $f(x) = f(y)$. Τότε:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1} \\ &\Leftrightarrow (x-1)(y+1) = (y-1)(x+1) \\ &\Leftrightarrow xy + x - y - 1 = xy + y - x - 1 \\ &\Leftrightarrow x - y = y - x \\ &\Leftrightarrow 2x = 2y \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

άρα η f είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη. Ο τύπος της f^{-1} είναι ο:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x-1}{x+1} \\ &\Leftrightarrow y(x+1) = x - 1 \\ &\Leftrightarrow yx + y = x - 1 \\ &\Leftrightarrow yx - x = -y - 1 \\ &\Leftrightarrow x(y-1) = -y - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-y-1}{y-1},\ y \neq 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{1-y},\ y \neq 1. \end{aligned}$$

Επομένως, ο τύπος της f^{-1} είναι:

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{1-y}$$

ή, αν προτιμάτε:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-x}$$

και το πεδίο ορισμού της είναι το

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

το οποίο είναι και το σύνολο τιμών της f.

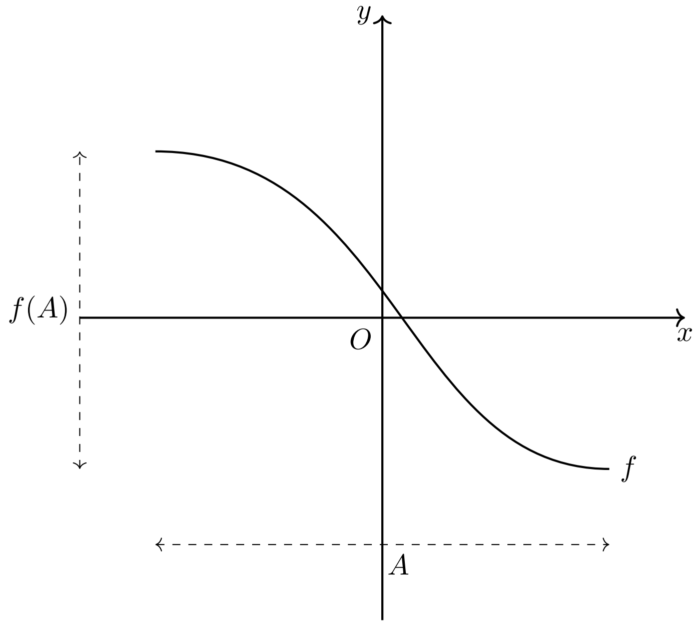
□

1.4.4 Γραφική παράσταση αντίστροφης συνάρτησης

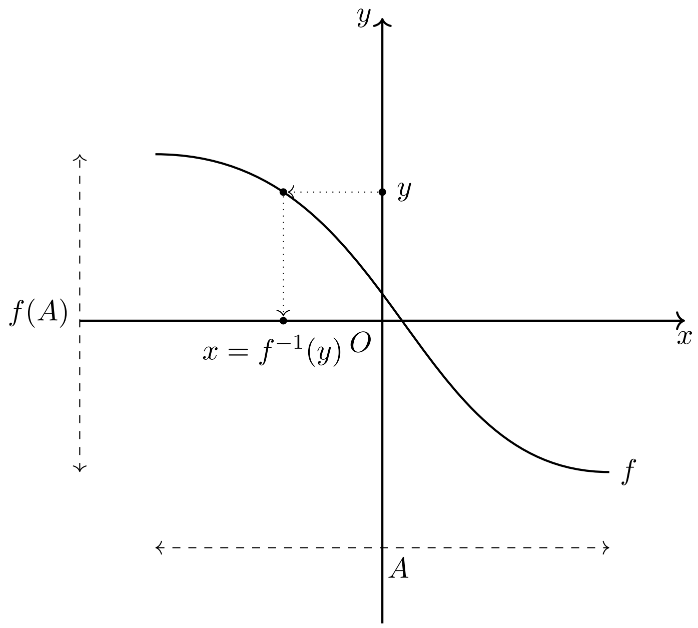
Τι σχέση έχει η γραφική παράσταση της αντίστροφης της f με τη γραφική παράσταση της f; Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : A \to f(A)$ με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.52. Αν επιλέξουμε ένα $y \in f(A)$ τότε υπάρχει ένα και μοναδικό $x \in A$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$ και, όπως έχουμε πει, αυτό το x είναι το $f^{-1}(y)$, δηλαδή ισχύει:

$$x = f^{-1}(y).$$

Εποπτικά, για να βρούμε το $f^{-1}(y)$, ξεκινάμε από το y και φέρουμε μία κάθετη στον άξονα $y'y$ μέχρι και τη γραφική παράσταση της f και από εκεί φέρουμε άλλη μία κάθετη προς τον άξονα $x'x$ μέχρι το $x = f^{-1}(y)$, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.53. Άρα οι f και f^{-1} έχουν την ίδια γραφική παράσταση; Προφανώς και και όχι! Αυτό που έχουμε αγνοήσει είναι ότι για τη γραφική παράσταση της f^{-1}, οι άξονες είναι «στραβοί». Έχουμε συμφωνήσει ότι στον οριζόντιο άξονα θα αναπαριστούμε πάντα την



Σχήμα 1.52: Η συνάρτηση f



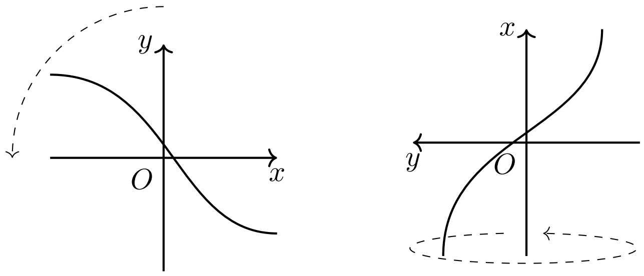
Σχήμα 1.53: Η συνάρτηση f

ανεξάρτητη μεταβλητή[48] ενώ στον κατακόρυφο την εξαρτημένη μεταβλητή[49]. Μπορεί για την f οι άξονες να είναι στις σωστές τους θέσεις, όμως για την f^{-1} η ανεξάρτητη μεταβλητή βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα (εκεί «ζει» το $f(A)$ και εμείς επιλέξαμε στην αρχή ένα $y \in f(A)$) άρα πρέπει να φέρουμε τους άξονες στη σωστή τους θέση. Για αυτό υπάρχουν δύο τρόποι: είτε θα στρίψουμε το κεφάλι μας δεξιά κατά $90°$ και στη συνέχεια θα γυρίσουμε τη σελίδα και θα κοιτάξουμε τη γραφική παράσταση από την πίσω μεριά της σελίδας είτε θα «παίξουμε» με τους άξονες όπως στο σχήμα 1.24. Το πρώτο αφήνεται σαν άσκηση για εσάς· εμείς εδώ θα ασχοληθούμε με το δεύτερο, γιατί

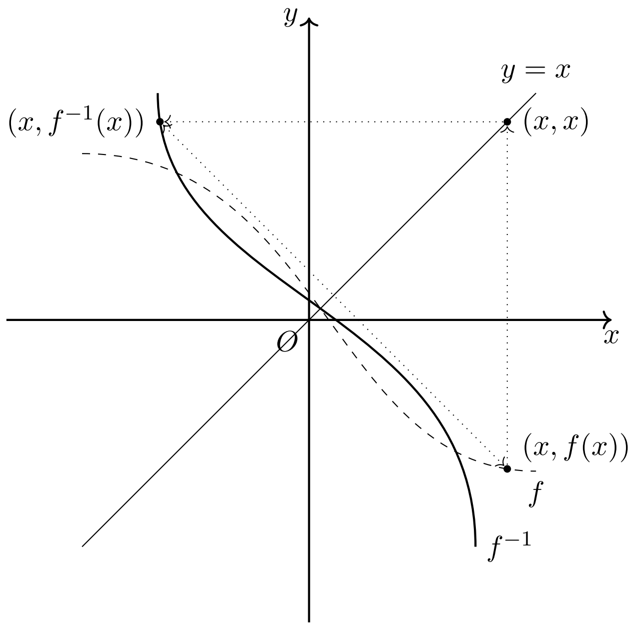
[48] Δηλαδή, τη μεταβλητή που τρέχει «ελεύθερα» στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και δεν εξαρτάται από κάτι άλλο (συνήθως τη συμβολίζουμε με x).

[49] Δηλαδή, τη μεταβλητή της οποίας οι τιμέ καθορίζονται από τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής (στην προκειμένη, το $y = f(x)$).

μας άρεσε αρκετά. Αν ξεκινήσουμε, λοιπόν, να στρίβουμε τους άξονες σε αυτήν την περίπτωση, όπως και στο σχήμα 1.24, θα πάρουμε τη γραφική παράσταση της f^{-1} όπως φαίνεται στα σχήματα 1.54 και 1.55. Ένας άλλος τρόπος για να πάρουμε τη γραφική παράσταση της f^{-1} έχοντας τη



Σχήμα 1.54: Στρίβοντας τους άξονες



Σχήμα 1.55: Η γραφική παράσταση της f^{-1}

γραφική παράσταση της f είναι να παρατηρήσουμε ότι, στην ουσία, η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.55. Για να πειστούμε περισσότερο για τη συμμετρία των δύο γραφικών παραστάσεων, μπορούμε να παρατηρήσουμε το εξής. Αν το σημείο (x, y) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τότε πρέπει να ισχύει $y = f(x)$. Ισοδύναμα, πρέπει να ισχύει $x = f^{-1}(y)$, άρα το σημείο (y, x) που είναι το συμμετρικό του (x, y) ως προς την ευθεία[50] $y = x$, γράφεται στη μορφή $(y, f^{-1}(y))$, άρα ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}.

1.4.5 Αντίστροφη συνάρτηση και μονοτονία

Μία υποκατηγορία των 1-1 συναρτήσεων είναι και οι μονότονες συναρτήσεις, όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα. Ποια η σχέση της μονοτονίας μίας συνάρτησης με την μονοτονία της αντιστρόφου της; Δεδομένης της συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων, περιμένουμε

[50] Για να το αποδείξει κανείς αυτό αρκεί να αποδείξει ότι το τρίγωνο με κορυφές (x, y), (x, x) και (y, x) είναι ισοσκελές με διάμεσο την $y = x$ (βλ. και σχήμα 1.55). Αυτό είναι εύκολο να το δείξει κανείς χρησιμοποιώντας απλή γεωμετρία.

να υπάρχει κάποια «σύνδεση» ανάμεσα στη μονοτονία μίας συνάρτησης f με τη μονοτονία της αντιστρόφου της, f^{-1}. Προς ικανοποίησή μας[51] ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1.3: Μονοτονία της αντίστροφης

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μία γνησίως μονότονη συνάρτηση τότε η αντίστροφή της ορίζεται και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

Απόδειξη. Αρχικά, εφ' όσον η f είναι γνησίως μονότονη, είναι και 1-1, άρα αντιστρέψιμη, επομένως, πράγματι, ορίζεται η αντίστροφή της, f^{-1}. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Θα δείξουμε τότε ότι και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. Έστω, προς άτοπο, ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα. Τότε υπάρχουν δύο αριθμοί $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}} = f(A)$ με $y_1 < y_2$ και

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2).$$

Αφού $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in A$, από την μονοτονία της f έχουμε ότι:

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \Rightarrow f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \Rightarrow y_1 \geq y_2$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $y_1 < y_2$. Άρα, πράγματι, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

□

Από το παραπάνω έπεται άμεσα ότι για μία γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα) συνάρτηση, η συνεπαγωγή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ (αντίστοιχα, } f(x_1) > f(x_2)\text{)},$$

γίνεται αυτόματα ισοδυναμία. Πράγματι, αν πάρουμε x_1, x_2 τέτοια ώστε $f(x_1) < f(x_2)$, με την f να είναι γνησίως αύξουσα, τότε, αφού και η f^{-1} θα είναι γνησίως αύξουσα, έπεται:

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2)) \Leftrightarrow x_1 < x_2,$$

που ήταν το ζητούμενο.

1.4.6 Σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}

Γενικότερα, οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f, g τέμνονται, δηλαδή διέρχονται από το ίδιο σημείο, αν $f(x) = g(x)$ για κάποιο/α x στο πεδίο ορισμού τους. Ειδικότερα, για τις συναρτήσεις f και f^{-1}, τα σημεία τομής τους έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = f^{-1}(x).$$

Τίποτα το ιδιαίτερο, προς το παρόν. Αυτό που ίσως φανεί χρήσιμο σε αρκετές περιπτώσεις είναι η «ιδιαίτερη» σχέση που έχουν οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} η οποία εκφράζεται μέσα από τις σχέσεις:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \ \forall x \in A$$

και

$$f(f^{-1}(y)) = y, \ \forall y \in f(A)$$

όπου A είναι το πεδίο ορισμού της f. Έτσι, εάν είναι πιο εύκολο, μπορούμε να λύσουμε μία από τις εξισώσεις:

$$f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

ή

$$f^{-1}(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

[51] Ας μη χρειαζόταν να διαβάζουμε όλη την ώρα και θα σού' λεγα τώρα! Εκεί να δεις ικανοποίηση!

για να βρούμε τα σημεία τομής των f και f^{-1}. Τέλος, στην περίπτωση που η f είναι γνησίως αύξουσα[52], ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.4

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε τα σημεία τομής της με την αντίστροφή της είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = x$$

δηλαδή, τα σημεία τομής των f και f^{-1} βρίσκονται επί της ευθείας $y = x$.

Απόδειξη. Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχει ένα σημείο τομής της f με την f^{-1}, το $M(x_0, y_0)$, το οποίο δε βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$. Τότε, $y_0 \neq x_0$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $y_0 < x_0$. Αφού το M είναι σημείο και των δύο γραφικών παραστάσεων ισχύει ότι:

   $$y_0 = f(x_0) = f^{-1}(x_0).$$

   Επίσης, αφού $y_0 < x_0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

   $$f(y_0) < f(x_0) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x_0)) < f(x_0) \Leftrightarrow x_0 < y_0$$

   το οποίο είναι άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι $y_0 < x_0$.

2. $y_0 > x_0$. Αφού το M είναι σημείο και των δύο γραφικών παραστάσεων ισχύει ότι:

   $$y_0 = f(x_0) = f^{-1}(x_0).$$

   Επίσης, αφού $y_0 > x_0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

   $$f(y_0) > f(x_0) \Leftrightarrow f(f^{-1}(x_0)) > f(x_0) \Leftrightarrow x_0 > y_0$$

   το οποίο είναι άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι $y_0 > x_0$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε αντίφαση, άρα δε γίνεται να υπάρχει σημείο τομής των f και f^{-1} εκτός της ευθείας $y = x$.

□

Παράδειγμα 1.23. Αν $f(x) = x + \ln x$ με $x > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, αν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \tag{1}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη την (1) με την $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 + \ln x_1 < x_2 + \ln x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως η f είναι και 1-1, άρα και αντιστρέψιμη και, από την προηγούμενη πρόταση, τα σημεία τομής της με την αντίστροφή της βρίσκονται από τις λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \ln x + x = x \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Επομένως, το κοινό σημείο των f και f^{-1} είναι το $(1, f(1))$, δηλαδή το $(1, 1)$.

□

[52] Όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.55, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε αυτό δεν ισχύει.

1.5 Δύο βασικές εφαρμογές της μονοτονίας και της 1-1 ιδιότητας

Τα μαθηματικά και οι μαθηματικές έννοιες πάντα προκύπτουν στην προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος. Έτσι, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι όσα είπαμε στις παραπάνω ενότητες έχουν, στο βάθος τους, ως σκοπό να επιλύσουν διάφορα προβλήματα. Στην πορεία της ύλης αλλά και στις ασκήσεις που ακολουθούν θα δούμε αρκετές εφαρμογές αυτών των εννοιών. Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε κυρίως με δύο βασικά προβλήματα που μας «καταδιώκουν» με διάφορες μορφές, από το γυμνάσιο: την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων.

1.5.1 Επίλυση εξισώσεων με τη χρήση της 1-1 ιδιότητας

Να θυμηθούμε την αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή του ορισμού μίας 1-1 συνάρτησης:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \ \forall x, y \in A$$

όπου A είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την ιδιότητα σε εξισώσεις; Αν μπορούμε να βρούμε μία 1-1 συνάρτηση f έτσι ώστε η εξίσωση που μας δίνεται να γράφεται στη μορφή:

$$f(x) = f(a)$$

για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ τότε μπορούμε, χρησιμοποιώντας την εν λόγω συνεπαγωγή να γράψουμε[53]:

$$f(x) = f(a) \Leftrightarrow x = a$$

οπότε και η μοναδική λύση της εξίσωση θα είναι το a. Ακολουθούν μερικά διαφωτιστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.24. Αν θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$x - 1 = e - \ln x$$

τότε, αφού ξεχωρίσουμε γνωστούς από αγνώστους έχουμε:

$$x + \ln x = 1 + e$$

η οποία, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$ (η οποία όπως έχουμε δει είναι 1-1) γράφεται:

$$f(x) = 1 + e.$$

Εδώ σταματάμε και σκεφτόμαστε: για ποια τιμή $a > 0$ έχουμε ότι $f(a) = 1 + e$; Μετά από λίγες δοκιμές, καταλήγουμε στο ότι $f(e) = e + \ln e = e + 1$, οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = f(e)$$

οπότε, αφού η f είναι 1-1, έχουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι η $x = e$.

□

Παράδειγμα 1.25. Αν θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$e^x + \sqrt{x+1} = 1$$

τότε, θεωρώντας της συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = e^x + \sqrt{x+1}, \ x \geq -1$$

[53] Η συνεπαγωγή $f(x) = f(a) \Rightarrow x = a$ ισχύει επειδή η f είναι 1-1, ενώ η συνεπαγωγή $x = a \Rightarrow f(x) = f(a)$ ισχύει επειδή η f είναι συνάρτηση.

έχουμε ότι αυτή είναι 1-1. Επειδή είναι δύσκολο να χειριστούμε την εξίσωση $f(x) = f(y)$ λόγω του εκθετικού, θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Έστω $x_1, x_2 \in [-1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε, διαδοχικά έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow \sqrt{x_1 + 1} < \sqrt{x_2 + 1} \tag{1}$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \tag{2}$$

και, προσθέτοντας τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$e^{x_1} + \sqrt{x_1 + 1} < e^{x_2} + \sqrt{x_2 + 1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1. Οπότε, η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$f(x) = 1$$

και, παρατηρώντας ότι $f(0) = 1$, η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$f(x) = f(0)$$

και, αφού η f είναι 1-1, έχουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι η $x = 0$.

□

1.5.2 Επίλυση ανισώσεων με τη χρήση της μονοτονίας

Αν μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, ας πούμε γνησίως αύξουσα, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, από τον ορισμό έχουμε ότι:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Αυτό όμως δε μας βοηθάει άμεσα στο να λύνουμε ανισώσεις. Έχουμε όμως και κάτι παραπάνω: κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και 1-1, άρα και αντιστρέψιμη και μάλιστα, η αντίστροφη της f, η f^{-1}, έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f. Επομένως, αν έχουμε μία ανισότητα της μορφής:

$$f(x) < f(a)$$

και η f είναι, ας πούμε, γνησίως αύξουσα, τότε και η f^{-1} θα είναι γνησίως αύξουσα και μπορούμε να πούμε:

$$f(x) < f(a) \Rightarrow f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(f(a)) \Rightarrow x < a$$

οπότε, αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, μπορούμε να την «βγάλουμε» από μία ανισότητα, μέσω της αντιστρόφου της.

Παράδειγμα 1.26. Αν θέλουμε να λύσουμε την ανισότητα:

$$e^x + \sqrt{x + 1} \leq 1$$

τότε, θεωρούμε την γνησίως αύξουσα συνάρτηση:

$$f(x) = e^x + \sqrt{x + 1}\ x \geq -1$$

οπότε η ανισότητα γράφεται:

$$f(x) \leq f(0) \Rightarrow x \leq 0.$$

Συναληθεύοντας και με τον περιορισμό $x \geq -1$, οι λύσεις της δοσμένης ανισότητας είναι όλοι οι αριθμοί $x \in [-1, 0]$.

□

1.6 Ασκήσεις

1.6.1 Ερωτήσεις Σωστού ή Λάθους

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως *Σωστές* ή *Λανθασμένες* και, στην περίπτωση που είναι σωστές, να αιτιολογήσετε ενώ, στην περίπτωση που είναι λανθασμένες, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

1. Στην παρακάτω σχέση:
$$2x^2 + 3y^2 = 6$$
το y μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του x.

2. Η αντιστοίχιση $f : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1\}$ που περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$f(x)$
0	1
1	0

είναι συνάρτηση.

3. Αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{x}$ τότε ισχύει ότι:
$$g \circ f = f \circ g.$$

4. Στην παρακάτω σχέση, το y μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του x:
$$2x + \ln y = x^2,\ y > 0.$$

5. Αν $f : A \to B$ είναι μία συνάρτηση τότε η ανιστοίχιση $g : f(A) \to A$ που αντιστοιχίζει το $f(x)$ «πίσω» στο x είναι συνάρτηση[54].

6. Στην παρακάτω σχέση, το x περιγράφεται σαν συνάρτηση του y:
$$y = \text{συν}\, x,\ x \in [0, \pi],\ y \in [-1, 1].$$

7. Για κάθε δύο συναρτήσεις f, g ισχύει ένα από τα τρία:
   - $f = g$,
   - $f < g$,
   - $f > g$.

8. Αν $f(x) = x$, τότε το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{f}$ είναι το $\mathbb{R}$.

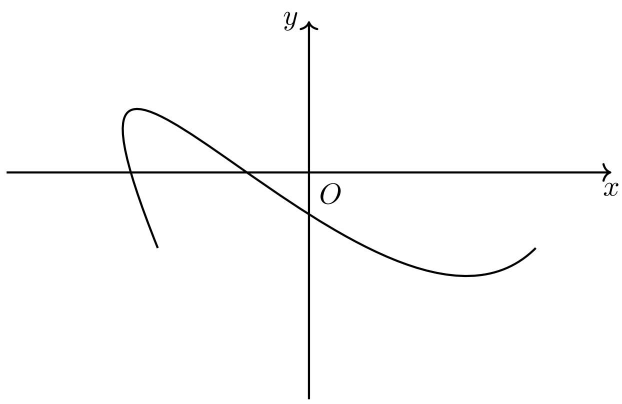
9. Αν $f(x) = e^x$, τότε το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{f}$ είναι το $\mathbb{R}$.

10. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη.

11. Αν $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις με $f < g$ τότε η εξίσωση:
$$f(x) - g(x) = 1$$
δεν έχει λύση.

12. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία 1-1 συνάρτηση, τότε η f έχει πάντα κοινά σημεία με την f^{-1}.

13. Υπάρχει συνάρτηση με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.56.



Σχήμα 1.56: Μία καμπύλη

14. Η εξίσωση
$$x^3 + x = 0$$
έχει μοναδική λύση το 0.

15. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, για $x \neq 0$ και $f(0) = 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

16. Κάθε 1-1 συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.

17. Μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ενδέχεται να έχει κοινά σημεία με την αντίστροφή της f^{-1} και εκτός της ευθείας $y = x$.

[54] Με άλλα λόγια, για την g έχουμε ότι:
$$f(x) \overset{g}{\mapsto} x.$$

18. Η $f(x) = x^2$, με $x \geq 0$ δεν είναι 1-1.

19. Αν μία συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη, τότε η εξίσωση

$$f(x) = c$$

έχει ακριβώς μία λύση για κάθε $c \in \mathbb{R}$.

20. Αν $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις με την f να είναι γνησίως αύξουσα και την g να είναι γνησίως φθίνουσα τότε η εξίσωση:

$$f(x) = g(x)$$

έχει το πολύ μία λύση.

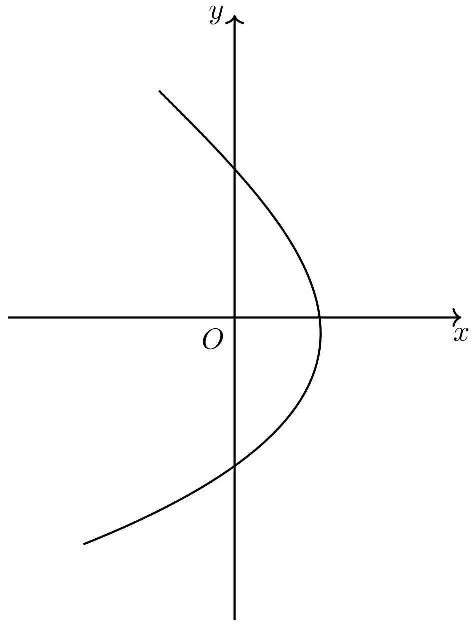
21. Αν f μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως αύξουσα.

22. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία 1-1 συνάρτηση, τότε η εξίσωση:

$$f^{-1}(x+1) = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση.

23. Δεν υπάρχει συνάρτηση με γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.57.



Σχήμα 1.57: Μία άλλη καμπύλη

24. Αν $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ και $g(x) = \ln(x-1)$, τότε:

$$(f+g)(x) = \sqrt{1-x^2} + \ln(x-1).$$

25. Η σύνθεση $f \circ g$ όπου $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = -|x|$ δεν ορίζεται.

26. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία αντιστρέψιμη συνάρτηση και f^{-1} είναι η αντίστροφή της τότε:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

27. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση τότε ισχύει:

$$f(x) - f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x - f^{-1}(x) = 0.$$

1.6.2 Α΄ Ομάδα

1. Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f : A \to B$, όπου:

   $A =$ το σύνολο των κατοίκων της Αθήνας

   $B =$ το σύνολο των τραπεζικών λογαριασμών

   και η f αντιστοιχίζει κάθε άνθρωπο του στοιχείου A στον τραπεζικό λογαριασμό που είναι στο όνομά του είναι συνάρτηση. Αιτιολογήστε κατάλληλα.

2. Τι θα έπρεπε να ισχύει για τους ενήλικες που ζουν στη Σουμάτρα (βλ. Παράδειγμα 1.2), έτσι ώστε η αντιστοίχιση Παιδί να είναι συνάρτηση;

3. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g με:

$$f(x) = \sqrt{x}^2$$
$$g(x) = x$$

είναι ίσες.

4. Να εξετάσετε στις παρακάτω σχέσεις αν το y μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση του x (ή αν το x μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση του y):
   (α′) $x^2 + y = 2$,
   (β′) $2x^2 + 3y^2 = 4$, $y > 0$,
   (γ′) $\ln x + y^3 = 1$, $x > 0$,
   (δ′) $x^2 + xy + y^2 = -xy$.

5. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:
   (α′) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$,
   (β′) $g(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2 - 1}$,
   (γ′) $h(x) = 2x + x^{-x}$,
   (δ′) $s(x) = \dfrac{1}{\ln(2x + 5)}$.

6. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:
   (α′) $f(x) = 2x + 4$, $x \in [-2, 6]$,
   (β′) $g(x) = \dfrac{3}{2x + 1}$, $x \in (1, 3)$,
   (γ′) $h(x) = \log_2(x + 2)$, $x \in (-1, 6]$,
   (δ′) $s(x) = x^2 - 1$, $x \in [-2, 5]$.

7. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:
   (α′) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{1 - \ln x}$,
   (β′) $g(x) = \sqrt{2x - x^2} + \dfrac{1}{x}$,
   (γ′) $h(x) = \dfrac{\ln(9 - x^2)}{\sqrt{x + 2}}$,
   (δ′) $s(x) = (x^2 - 2x - 3)^{2x + \ln x}$,
   (ε′) $t(x) = \ln(\eta\mu\, x) + \sqrt{\pi^2 - x^2}$.

8. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:
   (α′) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in (2, 5)$,
   (β′) $g(x) = x^3 + \sqrt{x}$, $x \in [0, 9)$,
   (γ′) $h(x) = x^4 + x^2$, $x \in [-2, -1]$,
   (δ′) $s(x) = \ln(1 + x)$, $x \in (1, e)$,
   (ε′) $t(x) = x^2 + 5$, $x \in (-2, 1]$.

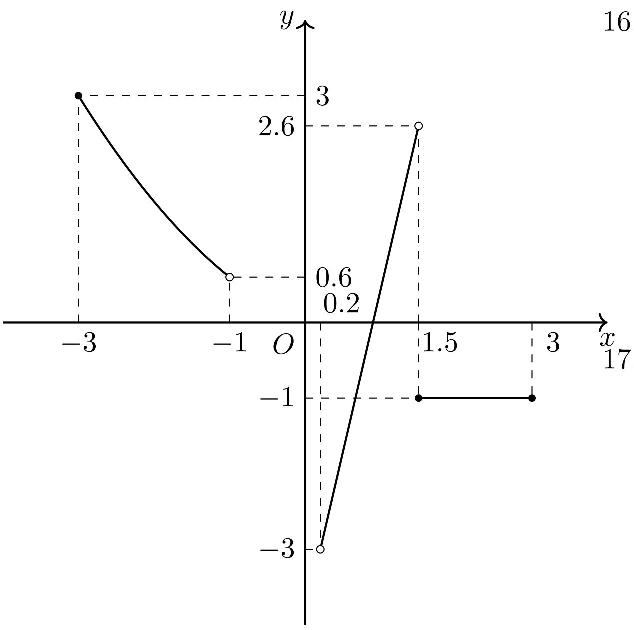
9. Να βρείτε τα πεδια ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:
   (α′) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$,
   (β′) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{e^{2x-1} - 1}$,
   (γ′) $h(x) = \ln(2x^3 - 5x + 3)$,
   (δ′) $s(x) = (2x + 4)^{x \ln x}$.

10. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:
    (α′) $f(x) = -2x + 4$, $x \in [-6, 8]$,
    (β′) $g(x) = 11x^2 - 8$, $x \in [0, 1)$,
    (γ′) $h(x) = \ln(2x + 4)$, $x \in (1, 2)$,
    (δ′) $s(x) = 2 + \eta\mu^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.

11. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να υπολογίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ και $\dfrac{f}{g}$:
    (α′) $f(x) = x - 2$ και $g(x) = x^2 + 4$,
    (β′) $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$ και $g(x) = \ln x$,
    (γ′) $f(x) = \dfrac{2 - 2x}{\sqrt{x}}$ και $g(x) = \dfrac{2}{x + 1}$,
    (δ′) $f(x) = x^x$ και $g(x) = (2x)^x$.

12. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να υπολογίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και να εξετάσετε αν είναι ίσες:
    (α′) $f(x) = 4 - 3x$ και $g(x) = \sqrt{x + 1}$,
    (β′) $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$,
    (γ′) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ και $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$,
    (δ′) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ και $g(x) = x$.

13. Αν f είναι μία συνάρτηση με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.58:



Σχήμα 1.58: Η συνάρτηση f

(α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

(β΄) Να βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση:

$$f(x) = 1.$$

(γ΄) Να βρείτε σε ποια διαστήματα η f είναι γνησίως αύξουσα και σε ποια γνησίως φθίνουσα.

(δ΄) Είναι η f άρτια; Περιττή;

14. Να γράψετε τις ακόλουθες συναρτήσεις σαν σύνθεση απλούστερων συναρτήσεων:

    (α΄) $f(x) = \text{ημ}^2(x-1)$,

    (β΄) $g(x) = \ln(x^2 - x + 1)$,

    (γ΄) $h(x) = e^{4x} + e^{2x} + e^x + 1$,

    (δ΄) $s(x) = 2\,\text{εφ}^4(x+2) - 4\,\text{εφ}^3(x+2) - 4$,

    (ε΄) $t(x) = \dfrac{2e^{\sqrt{x}} - 1}{e^{2\sqrt{x}} + 1}$.

15. Να μελετήσετε τις ακόλουθες συναρτήσεις ως προς την μονοτονία:

$$f(x) = x^3 + x + e^x$$
$$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x-1}\right) - 2x.$$

Τι μπορείτε να πείτε για την μονοτονία της $f - g$;

16. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1»:

    (α΄) $f(x) = x^3 + x + 1$,

    (β΄) $g(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$,

    (γ΄) $h(x) = 2x^2 + 4x$,

    (δ΄) $s(x) = e^{x+1} - e^{x-1}$.

17. Να βρείτε τις αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων:

    (α΄) $f(x) = x^3 - 4$,

    (β΄) $g(x) = \dfrac{3x-1}{2x+2}$,

    (γ΄) $h(x) = \ln\dfrac{e^x}{e^x+1}$,

    (δ΄) $s(x) = \sqrt{2x^3+2}$.

18. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

    (α΄) $x^3 + x = 10$,

    (β΄) $2\ln x + x = 1$,

    (γ΄) $e^{2x+4} - e^{2-4x} = e^5 - 1$,

    (δ΄) $\ln(x+5) - \ln(2x+4) = 0$.

19. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

    (α΄) $2x^7 + e^x > 1$,

    (β΄) $\ln x - \ln(1-x) < 0$,

    (γ΄) $e^x + 4\ln x \leq e^e + 4$,

    (δ΄) $\text{συν}\,x - \text{ημ}\,x \geq \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

20. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

    (α΄) $f(x) = (x-1)^2 - 4$,

    (β΄) $g(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$,

    (γ΄) $h(x) = \left|1 - \sqrt{|x| - 4}\right|$,

    (δ΄) $s(x) = |\ln(|x|)|$.

21. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{3}{2x-6}$$

και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

22. Να λύσετε την εξίσωση:
$$x^7 + 2e^{3x-4} = 1 + \frac{2}{e}.$$

23. Να λύσετε την ανισότητα:
$$\ln(x+1) - x \geq \ln(x-1) + \ln\frac{3}{2} - 2.$$

24. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$$f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}.$$

25. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$$f(x) = 3 - e^{x+4}.$$

1.6.3 Β΄ Ομάδα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\, x$, $x \in [0, 2\pi]$.
   (α΄) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
   (β΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
   (γ΄) Να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση
   $$f(x) = \frac{1}{3}.$$
   (δ΄) Να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση:
   $$f(x) = \frac{x}{\pi}.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x - 5$, $x \in [-4, 4]$.
   (α΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
   (β΄) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
   (γ΄) Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η εξίσωση:
   $$f(x) = a,$$
   έχει μοναδική λύση.
   (δ΄) Να βρείτε μία συνάρτηση g τέτοια ώστε:
   $$(g \circ f)(x) = x, \ \forall\, x \in [-4, 4].$$

3. Αν $f(x) = x^2 + x$, με $x \geq 0$:
   (α΄) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
   (β΄) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.
   (γ΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
   (δ΄) Να βρείτε τα κοινά σημεία των f και f^{-1}.

4. Αν $f(x) = \frac{3x}{x+1}$:
   (α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
   (β΄) Να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.
   (γ΄) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.
   (δ΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
   (ε΄) Έχει λύση η εξίσωση:
   $$f(x) = 2020;$$
   Να απαντήσετε χωρίς να λύσετε την εξίσωση.

5. Αν $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με:
   $$f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x + 1}$$
   (α΄) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
   (β΄) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

6. Αν $f(x) = -3 + \ln(|x| + 2)$:
   (α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
   (β΄) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία (θα χρειαστεί να πάρετε δύο περιπτώσεις).
   (γ΄) Να βρείτε ένα ακρότατο της f.
   (δ΄) Είναι η f άρτια/περιττή;
   (ε΄) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.
   (ϛ΄) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $|f|$.

7. Αν
$$f(x) = \frac{3+x}{1+x}$$
   (α΄) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
   (β΄) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
   (γ΄) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.
   (δ΄) Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.

8. Να βρείτε δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε:
$$f \circ g = g \circ f$$
   και καμμία από τις f, g να μην είναι η $h(x) = x$.

9. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία άρτια συνάρτηση, τότε να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

10. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία περιττή και 1-1 συνάρτηση, είναι και η f^{-1} περιττή;

11. Αν $f(x) = x \ln x$, σε ποιο διάστημα μπορείτε να πείτε με βεβαιότητα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα;

12. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης
$$f(x) = \left| \frac{|x|}{1-|x|} \right|.$$

13. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση:
$$(x^2+1)^2 f^2(x) + x^4 \leq 2x^4 f(x) + 2x^2 f(x).$$
   (α΄) Να δείξετε ότι:
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$
   Θα σας χρειαστεί το γεγονός ότι $(a-b)^2 \geq 0$.
   (β΄) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
   (γ΄) Να βρείτε ένα ολικό μέγιστο της f.
   (δ΄) Σε ποιο διάστημα πρέπει να περιορίσουμε την f έτσι ώστε αυτή να είναι αντιστρέψιμη;
   (ε΄) Έχει λύση η εξίσωση:
$$f(x) = 2019^{2020};$$

14. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:
$$e^{f(x)} + 4f(x) = x.$$
   (α΄) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
   (β΄) Να υπολογίσετε το $f(0)$.
   (γ΄) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

15. Δίνεται μία συνάρτηση $f : [-1,1] \to [0,\pi]$ που ικανοποιεί τη σχέση:
$$\text{συν}\, f(x) = x.$$
   (α΄) Να βρείτε το $f(0)$.
   (β΄) Να δείξετε ότι η f είναι «1-1».
   (γ΄) Να δείξετε ότι:
$$f(\text{συν}\, x) = \text{συν}\, x,$$
   για κάθε $x \in [0,\pi]$.
   (δ΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
   (ε΄) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

16. Πόσες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ υπάρχουν που να είναι και άρτιες και περιττές;

17. Να βρείτε μία συνάρτηση f που να είναι 1-1 αλλά να μην είναι γνησίως μονότονη.

18. Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι 1-1 αλλά όχι γνησίως μονότονη;

19. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο:
$$f(x) = x^5 + x^3 + x + 1.$$
   (α΄) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη.
   (β΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
   (γ΄) Υπάρχει αριθμός $\theta \in [0,\pi]$ τέτοιος ώστε:
$$\text{ημ}^5\theta + \text{ημ}^3\theta + \text{ημ}\,\theta = 2;$$

1.6.4 Γ′ Ομάδα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4,\ x \in (-3, 3)$.

   (α′) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

   (β′) Να εξηγήσετε αν υπάρχει αριθμός $x_0 \in (-3, 3)$ τέτοιος ώστε:
   $$f(x_0) = e^{\pi}.$$

   (γ′) Να βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση:
   $$f(x) = \ln x.$$

   (δ′) Να λύσετε την ανίσωση:
   $$f(x) < f(x + 1).$$

   (ε′) Υπάρχει συνάρτηση g για την οποία να ισχύει ότι:
   $$g(f(x)) = x,\ \forall\ x \in (-3, 3);$$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \text{ημ}\, x$ και $g(x) = \text{συν}\, x$ με $D_f = D_g = [0, 2\pi]$.

   (α′) Να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.

   (β′) Να βρείτε τα σύνολα τιμών τους.

   (γ′) Να λύσετε την εξίσωση:
   $$f(x) = g(x).$$

   (δ′) Να λύσετε, χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, την ανίσωση:
   $$f(x) < g(x).$$

   (ε′) Αν περιοριστούμε στο διάστημα $[0, 1]$, ποιο θα είναι το σύνολο τιμών της $f(x) = \text{ημ}\, x$; Εξηγήστε χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

   (ϛ′) Ανάλογα, αν περιοριστούμε στο $[0, 1]$, ποιο θα είναι το σύνολο τιμών της $g(x) = \text{συν}\, x$; Εξηγήστε χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

   (ζ′) Πώς θα μπορούσατε, χρησιμοποιώντας τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων, να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση:
   $$\text{ημ}\, x - \text{συν}\, x = 1;$$
   Υποδείξτε μία μέθοδο και, στη συνέχεια, βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση.

   (η′) Προσπαθήστε να λύσετε την παραπάνω εξίσωση με τριγωνομετρία.

3. Είδαμε ότι αν f, g είναι δύο συναρτήσεις, τότε δεν ισχύει πάντα ότι
   $$f \circ g = g \circ f.$$
   Είδαμε, επίσης, ότι πολλές φορές μία σύνθεση δεν έχει νόημα. Σε αυτήν την άσκηση θα «σκαλίσουμε» διάφορες περιπτώσεις για να δούμε τι μπορεί να συμβεί.

   (α′) Να βρείτε δύο συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε:
   $$f \circ g = g \circ f.$$

   (β′) Να βρείτε δύο συναρτήσεις f, g έτσι ώστε οι $f \circ g$ και $g \circ f$ να έχουν ίδιο τύπο και διαφορετικά πεδία ορισμού.

   (γ′) Να βρείτε δύο συναρτήσεις f, g έτσι ώστε η $f \circ g$ να ορίζεται αλλά η $g \circ f$ να μην ορίζεται[55].

   (δ′) Να βρείτε δύο συναρτήσεις f, g έτσι ώστε ούτε η $f \circ g$ ούτε η $g \circ f$ να μην ορίζονται.

   (ε′) Να βρείτε μία συνάρτηση f έτσι ώστε η $f \circ f$ να μην ορίζεται.

   (ϛ′) Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε:
   $$(f \circ f)(x) = x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

   (ζ′) Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να ικανοποιεί τη σχέση:
   $$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x),$$
   για οποιαδήποτε συνάρτηση g.

[55] Λέγοντας ότι δεν ορίζεται, εννοούμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το κενό σύνολο.

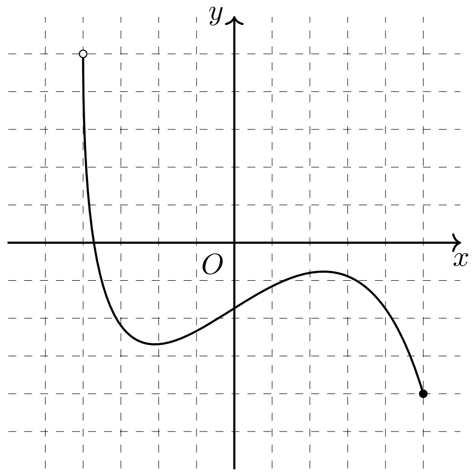
(η′) Να δείξετε ότι η συνάρτηση που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα είναι μοναδική.

(ϑ′) Μία πονηρή μαθηματικός, η Ρουσάλκα, παίζει το ακόλουθο παιχνίδι με τον γραμματέα της, τον Βόντνικ: Η Ρουσάλκα ζητάει από τον Βόντνικ να διαλέξει μία συνάρτηση[56] f και αυτή του βρίσκει μία συνάρτηση g τέτοια ώστε:

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Η Ρουσάλκα έχει τάξει μία μεγάλη αύξηση στον Βόντνικ αν καταφέρει και της βρει μία συνάρτηση f για την οποία δε θα μπορεί να του βρει μία κάτάλληλη συνάρτηση g όπως παραπάνω. Έχει ελπίδες να κερδίσει ποτέ την αύξησή του ο Βόντνικ; Αν ναι, ποια στρατηγική πρέπει να ακολουθήσει. Αν όχι, γιατί;

4. Δίνεται μία συνάρτηση f με γραφική παράσταση αυτή που φαίνεται στο σχήμα 1.59.



Σχήμα 1.59: Η συνάρτηση f.

(α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

(β′) Να βρείτε το πλήρθος των ριζών της f.

(γ′) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = -1$.

(δ′) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = x$.

(ε′) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των:

i. $f(x-1)$,

ii. $f(x)+1$,

iii. $-f(x)$,

iv. $|f(x)|$,

v. $f(x+2)-1$,

vi. $f(|x|)$.

(ϛ′) Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση

$$f(x) = \lambda x,$$

έχει ακριβώς μία ρίζα για κάθε $\lambda > 0$.

(ζ′) Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση

$$f(x) = ax^2,$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα για κάθε $a < 0$.

5. Αν $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τρεις συναρτήσεις έτσι ώστε:

- η f είναι γνησίως αύξουσα,
- η g είναι γνησίως αύξουσα,
- η h είναι γνησίως φθίνουσα.

(α′) Να δείξετε ότι η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

(β′) Να δείξετε ότι η $f \circ h$ είναι γνησίως φθίνουσα.

(γ′) Να δείξετε ότι η $h \circ h$ είναι γνησίως αύξουσα.

(δ′) Τι μπορείτε να πείτε για τη μονοτονία της $f \circ g \circ h$;

6. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, να δείξετε ότι:

(α′) Η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

είναι άρτια.

(β′) Η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

είναι περιττή.

[56] Εντάξει, έχουμε ξεφύγει και επίσημα, πια.

(γ΄) Η f γράφεται σαν άθροισμα μία άρτιας συνάρτησης $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μίας περιττής συνάρτησης $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δηλαδή:

$$f(x) = A(x) + \Pi(x).$$

7. Να βρείτε 4 αντιστρέψιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε:

$$f(x) = f^{-1}(x).$$

8. Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις έτσι ώστε:

$$g(f(x) + 1) = 4x - 3, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

και η g είναι γνησίως αύξουσα:

(α΄) Να δείξετε ότι και η f είναι γνησίως αύξουσα.

(β΄) Αν $f(0) = -1$, να βρείτε το $g(0)$.

(γ΄) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το $f^{-1}(1)$ αν γνωρίζετε ότι $g(2) = 1$.

(δ΄) Να λύσετε την ανισότητα:

$$f(f^{-1}(x) - x) \geq -1.$$

(ε΄) Να δείξετε ότι η ανισότητα:

$$g\left(f^3(x) + f(x) + 1\right) < g\left(g^3(x) + g(x) + 1\right)$$

έχει λύσεις αν και μόνο αν η ανισότητα:

$$f(x) < g(x)$$

έχει λύσεις.

9. Δίνεται μία μη σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x + y) = f(x)f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να δείξετε ότι $f(0) = 1$.

(β΄) Να δείξετε ότι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ΄) Να δείξετε ότι $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(δ΄) Να δείξετε ότι $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(ε΄) Να δείξετε ότι $f(-2x) = \frac{1}{f^2(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ϛ΄) Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα;

10. Δίνεται μία μη σταθερή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(xy) = f(x)+f(y), \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty)$$

(α΄) Να δείξετε ότι $f(1) = 0$.

(β΄) Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(γ΄) Να δείξετε ότι $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

(δ΄) Να δείξετε ότι δεν ισχύει ούτε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ούτε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(ε΄) Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα;

11. Δίνεται μία μη σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \neq 0$ και για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

(α΄) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

(β΄) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

(γ΄) Να δείξετε ότι $f(x - y) = f(x) - f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(δ΄) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

(ε΄) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(0)x^{2020} + x^2 + 1 = 0$ δεν έχει λύση.

(ϛ΄) Να δείξετε ότι $f(2x) = 2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ζ΄) Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα;

12. Πριν περάσουμε στην επόμενη παρόμοια άσκηση, ας σταθούμε λίγο στην προηγούμενη. Έστω, πάλι, μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

(α′) Δείξαμε προηγουμένως ότι $f(2x) = 2f(x)$. Να δείξετε ότι $f(3x) = 3f(x)$ και ότι $f(4x) = 4f(x)$. Γενικότερα, να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν ισχύει ότι:

$$f(\nu x) = \nu f(x).$$

(β′) Να δείξετε ότι και για ν αρνητικό ακέραιο ισχύει ότι $f(\nu x) = \nu f(x)$.

(γ′) Έχουμε δείξει ως τώρα ότι για κάθε ακέραιο[57] $\nu \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι:

$$f(\nu x) = \nu f(x),$$

από το οποίο, για $x = 1$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f(\nu) = \nu f(1)$, για κάθε $\nu \in \mathbb{Z}$. Να δείξετε και ότι, αν μ είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε ισχύει ότι:

$$f\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu} f(1).$$

(δ′) Να δείξετε ότι για κάθε μ θετικό ακέραιο και κάθε ν ακέραιο, ισχύει:

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \frac{\nu}{\mu} f(1).$$

(ε′) Μπορείτε να υπολογίσετε με αυτά τα δεδομένα το $f(\sqrt{2})$;

13. Δίνεται μία μη σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x+y) = f(x)+f(y)+2xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

(α′) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

(β′) Να δείξετε ότι $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ′) Να δείξετε ότι $f(2x) = 3f(x) + f(-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(δ′) Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα;

14. Να βρείτε μία «1-1» συνάρτηση f τέτοια ώστε:

(α′) Η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2]$.

(β′) Η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και στο $(2, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2]$.

(γ′) Η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και στο $(2, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2]$ και στο $(3, 4]$.

(δ′) Η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $(\nu - 1, \nu]$ για κάθε περιττό ν και γνησίως φθίνουσα στο $(\nu - 1, \nu]$ για κάθε άρτιο ν.

15. Μπορείτε να βρείτε μία «1-1» συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ που να παρουσιάζει ολικό μέγιστο; Αν $D_f = (0, 1)$;

16. Μπορείτε να βρείτε μία «1-1» συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να παρουσιάζει ολικό μέγιστο;

17. Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να τέμνει κάθε ευθεία της μορφής $y = ax$; Πόσες τέτοιες συναρτήσεις μπορείτε να βρείτε;

18. Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να τέμνει κάθε ευθεία; Αν ναι, ποια; Αν όχι, γιατί;

19. Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^5(x) + e^{f(x)} + 3 = x,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$; Αν δεν μπορείτε να βρείτε τον τύπο της, μπορείτε να εξηγήσετε αν υπάρχει ή όχι τέτοια συνάρτηση;

20. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέμε ότι έχει σταθερό σημείο το $x_0 \in A$ αν $f(x_0) = x_0$.

(α′) Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να έχει:

i. κανένα, ii. ένα, iii. δύο, iv. τρία, v. 100,

σταθερά σημεία.

(β′) Να βρείτε μία συνάρτηση $f : [0, 1] \to [0, 1]$ που να μην έχει σταθερά σημεία.

(γ′) Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να έχει άπειρα σταθερά σημεία και να μην είναι η $f(x) = x$.

21. Έχουμε ένα σύρμα μήκους ℓ μέτρων με το οποίο παίζουμε και κατασκευάζουμε ορθογώνια[58].

[57] Αφού δεν το δείξαμε για το 0, πώς λέμε ότι το δείξαμε για κάθε ακέραιο;

[58] Είναι σαφές ότι υπάρχει κάποιο θέμα. . .

(α΄) Αν η μία πλευρά του ορθογωνίου έχει μήκος x, να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου, E, σαν συνάρτηση του x.

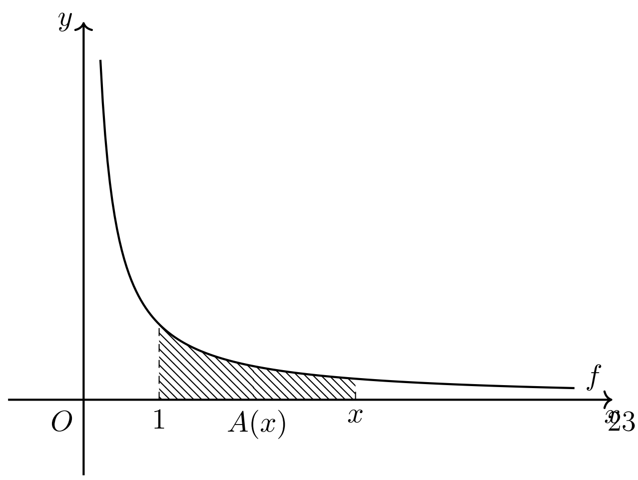
(β΄) Να μελετήσετε την E ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(γ΄) Να δείξετε ότι το μέγιστο εμβαδόν προκύπτει όταν το ορθογώνιό μας είναι τετράγωνο.

22. Ας θεωρήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 1.60.



Σχήμα 1.60: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$

Ορίζουμε σαν $A : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ τη συνάρτηση που αντιστοιχίζει κάθε αριθμό $x \geq 1$ στο εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f και πάνω από τον άξονα $x'x$, ανάμεσα στο 1 και το x, όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.60.

(α΄) Είναι όντως η A συνάρτηση; Γιατί;

(β΄) Αν είναι γνωστό ότι το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται ανάμεσα στην υπερβολή και τον άξονα $x'x$ μεταξύ των x, y (όπου $y > x \geq 1$), έστω $E_{x,y}$, έχει την εξής ιδιότητα:

$$E_{tx,ty} = E_{x,y}$$

δηλαδή, για παράδειγμα, το εμβαδόν $E_{2,3}$ είναι ίσο με το εμβαδόν $E_{6,9}$ (βλ. και σχήμα ;;) τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση A έχει την εξής ιδιότητα:

$$A(xy) = A(x) + A(y)\ \forall x, y \geq 1.$$

(γ΄) Μπορείτε να βρείτε μία γνωστή συνάρτηση που να έχει επίσης αυτήν την ιδιότητα;

Μία συζήτηση σε σχέση με το παραπάνω πρόβλημα μπορείτε να βρείτε εδώ.

23. Από τα προβλήματα που παρουσιάσαμε στην πρώτη ενότητα, ποια μπορείτε πια να λύσετε και σε ποια μπορείτε να προχωρήσετε λίγο περισσότερο από ό,τι στην αρχή;

Κεφάλαιο 2

Όρια

2.1 Η έννοια της προσέγγισης στους πραγματικούς αριθμούς

2.1.1 $0.999\ldots = 1$ ή κάποιος το έχει χάσει;

Όσοι προσέχατε στα μαθηματικά των προηγούμενων τάξεων, σίγουρα θα έχετε δει, ίσως ακόμα και να θυμάστε μια, κατά κάποιον τρόπο, ταχυδακτυλουργική απόδειξη, σε σχέση με τον τίτλο αυτής της ενότητας δηλαδή ότι ο αριθμός $0.999\ldots$ είναι, στην πραγματικότητα, ο αριθμός 1, απλά λίγο μασκαρεμένος. Για την ακρίβεια, η απόδειξη είχε ως εξής:

$$\begin{aligned} x &= 0.999\ldots \Rightarrow \\ \Rightarrow 10x &= 9.999\ldots \Rightarrow \\ \Rightarrow 10x - x &= 9.999\ldots - 0.999\ldots \Rightarrow \\ \Rightarrow 9x &= 9 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= 1, \end{aligned}$$

και, τσουπ, αποδείχθηκε αυτό που θέλαμε! Αλλά, για μισό λεπτό, θα πει κάποιος, πώς γίνεται να ξεκινάει ο ένας αριθμός με 0 και ο άλλος με 1 και να είναι ίσοι; Μήπως, τελικά, η παραπάνω απόδειξη έχει κάποιο λάθος;

Ας προσπαθήσουμε να ερευνήσουμε το πρόβλημα αυτό λίγο βαθύτερα. Γενικά, γνωρίζουμε ότι για δύο πραγματικούς αριθμούς x και y μπορεί να ισχύει *ακριβώς ένα* από τα ακόλουθα τρία[1]:

$$x < y, \; x > y, \; x = y.$$

Η προηγούμενη απόδειξη μας δείχνει ότι ισχύει η ισότητα, αν και η διαίσθηση των περισσοτέρων θα έλεγε ότι ισχύει η ανισότητα $0.999\ldots < 1$, αφού «φαίνεται» ο αριθμός $0.999\ldots$ να είναι «λίγο πριν» το[2] 1. Για να καταλάβουμε καλύτερα τον αριθμό $0.999\ldots$[3] ας δούμε πρώτα κάποια «ξαδερφάκια» του. Για την ακρίβεια ας ασχοληθούμε πρώτα με τον αριθμό 0.9. Αυτός ο αριθμός είναι, προφανώς μικρότερος του 1 αλλά μικρότερος του $0.999\ldots$. Επίσης, και ο αριθμός 0.99 είναι μικρότερος και από τον 1 και από τον $0.999\ldots$ και, γενικότερα, για προφανείς λόγους, όλοι οι αριθμοί που έχουν οσοδήποτε πολλά, αλλά όχι άπειρα «9» στο δεκαδικό τους μέρος, είναι αυστηρά μικρότεροι από τους

[1] Αυτήν την ιδιότητα των πραγματικών αριθμών την ονομάζουμε *τριχοτομία*.

[2] Αλήθεια, γιατί δεν ασχολούμαστε καθόλου με την περίπτωση $0.999\ldots > 1$;

[3] Δηλαδή, για να καταλάβουμε καλύτερα τον αριθμό 1, που μας φαίνεται τόσο απλός!

Σχήμα 2.1: Η θέση του a_μ

1 και 0.999..., δηλαδή:

$$0.\underbrace{99\ldots9}_{\nu} < 0.999\ldots \text{ και } 0.\underbrace{99\ldots9}_{\nu} < 1,$$

για οποιοδήποτε πλήθος (ν) από «9».

Παρατηρήστε τώρα ότι οι αριθμοί $a_\nu = 0.\underbrace{99\ldots9}_{\nu}$ «πλησιάζουν» τον αριθμό 1 υπό την εξής έννοια: όσο τοποθετούμε κι άλλα «9» στο τέλος, τόσο μικρότερη είναι η διαφορά

$$1 - a_\nu = 1 - 0.\underbrace{99\ldots9}_{\nu} = 0.\underbrace{00\ldots1}_{nu} = 10^{-\nu}.$$

Μάλιστα, για να είμαστε λίγο πιο ακριβείς, αν επιθυμούμε η διαφορά $1 - a_\nu$ να είναι μικρότερη από, λ.χ. 10^{-7}, δεν έχουμε παρά να εξετάσουμε τη διαφορά $1 - a_8 = 10^{-8}$ ή, γενικά, τη διαφορά $1 - a_\nu$ για κάποιο ν μετά το 7.

Σε ένα πιο διαισθητικό επίπεδο, αυτό σημαίνει ότι όσο προχωράμε «χτίζοντας» τους αριθμούς a_ν, πλησιάζουμε όλο και περισσότερο στο 1, και μάλιστα, οσοδήποτε θέλουμε. Ας θυμηθούμε τώρα ότι ο αριθμός 0.999... είναι μεγαλύτερος από όλους τους αριθμούς a_ν, επομένως, πρέπει να βρίσκεται πολύ κοντά στο 1. Πόσο κοντά, όμως;

Αν υποθέσουμε ότι δεν είναι ίσος με 1, τότε θα είναι μικρότερος και άρα θα μπορέσουμε να βρούμε έναν αριθμό από τους a_ν, ας τον ονομάσουμε a_μ πιο κοντά από ότι ο 0.999... βρίσκεται στον[4] 1. Τότε έχουμε μία κατάσταση όπως αυτή που περιγράφεται στο σχήμα 2.1. Όμως, εδώ είναι εμφανές ότι πρέπει να ισχύει:

$$0.999\ldots < a_\mu = 0.\underbrace{99\ldots9}_{\mu},$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού $a_\mu < 0.999\ldots$. Άρα, δεδομένου ότι $0.999\ldots \leq 1$, πρέπει να ισχύει:

$$0.999\ldots = 1.$$

Ας δούμε τώρα ξανά την πορεία της σκέψης μας: για να δείξουμε ότι ο αριθμός 0.999... δεν είναι μικρότερος του 1, πήραμε κάποιους άλλους αριθμούς, τους a_ν, άπειρους στο πλήθος, οι οποίοι είχαν την ιδιότητα ότι βρίσκονταν οσοδήποτε κοντά επιθυμούμε στο 1, από ένα σημείο και μετά. Επίσης, αυτοί οι αριθμοί ήταν όλοι την ιδιότητα ότι ήταν μικρότεροι και από το 0.999..., οπότε, καθώς αυτοί οι αριθμοί «πλησίαζαν» προς το 1, «παρέσυραν» μαζί τους και το 0.999... και, έτσι, αποδείχθηκε το ζητούμενο[5].

2.1.2 Κινούνται οι αριθμοί;

Λίγες γραμμές παραπάνω αναφέραμε ότι οι αριθμοί a_ν «πλησιάζουν» τον αριθμό 1. Μα, οι αριθμοί είναι σταθερά τοποθετημένοι πάνω στην ευθεία των αριθμών, άρα, έχουν μία συγκεκριμένη, επίσης σταθερή, απόσταση, από τον αριθμό 1. Άρα δεν γίνεται να πλησιάσουν δύο αριθμοί, όπως δε γίνεται

[4] Αφού μπορούμε να βρούμε a_ν όσο κοντά θέλουμ στο 1.

[5] Αυτές τις δύο λέξεις που βρίσκονται σε εισαγωγικά — «πλησίαζαν» και «παρέσυραν» θα τις διατυπώσουμε σε αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο στην πορεία του κεφαλαίου.

να σταθείτε απέναντι από έναν τοίχο και να περιμένετε να έρθει καταπάνω σας, ενώ κι εσείς είστε ακίνητοι. Τότε, τι νόημα έχει αυτό το «πλησιάζουν»;

Αν είμαστε λίγο πιο προσεκτικοί, θα παρατηρήσουμε ότι δεν αναφέρουμε πουθενά ότι ένας από αυτούς τους αριθμούς πλησιάζει το 1 αλλά ότι «οι αριθμοί αυτοί πλησιάζουν το 1». Δηλαδή, όλοι μαζί, κατά κάποιον τρόπο. Σε πιο αυστηρή, μαθηματική γλώσσα, θα λέγαμε ότι:

μία μεταβλητή x που παίρνει διαδοχικά τις τιμές $a_1, a_2, \ldots$ «πλησιάζει» τον αριθμό 1.

Επομένως, δεν μπορεί ένας αριθμός να πλησιάζει έναν άλλο αριθμό, αλλά μία *μεταβλητή*, να πλησιάζει έναν αριθμό. Για να το φέρουμε λίγο στα μέτρα μας, ας σκεφτούμε ότι στεκόμαστε στην όχθη μιας λίμνης και θέλουμε να φτάσουμε σε ένα νησάκι, στη μέση της λίμνης. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι δε θέλουμε να βραχούμε καθόλου και ότι, για καλή μας τύχη, υπάρχει ένα «μονοπάτι», από διάσπαρτα βραχάκια[6] μέσα στη λίμνη, το οποίο, τελικά, οδηγεί στο νησάκι. Τα βραχάκια και το νησάκι, σε αντίθεση με εμάς, έχουν σταθερές θέσεις μέσα στη λίμνη. Εμείς, λοιπόν, είμαστε αυτοί που πλησιάζουν το νησάκι, περνώντας από τα διάφορα βραχάκια στον δρόμο μας και όχι τα βραχάκια τα ίδια.

Να παρατηρήσουμε, επίσης, ότι, η έννοια του «πλησιάζειν» σημαίνει ότι δε φτάνουμε απαραίτητα ακριβώς πάνω στο στόχο μας, αλλά πάμε όλο και πιο κοντά, οσοδήποτε θέλουμε[7]. Έτσι, λοιπόν, προκύπτει ο ακόλουθος

Ορισμός 2.1

Μία μεταβλητή x θα λέμε ότι *τείνει* σε έναν συγκεκριμένο αριθμό x_0, αν παίρνει τιμές οσοδήποτε κοντά[α] θέλουμε στον αριθμό x_0 από ένα σημείο και μετά[β] Τότε, συμβολικά, γράφουμε $x \to x_0$.

[α] Η έννοια του «οσοδήποτε κοντά» στα μαθηματικά είναι σαφώς ορισμένη μέσα από την έννοια της απόστασης, δηλαδή μέσα από την απόλυτη τιμή.

[β] Δηλαδή, δεν μπορεί να παίρνει διαρκώς τιμές «άσχετες» από το x_0. Πρέπει να υπάρχει μία τιμή από την οποία και μετά, ό,τι τιμή και να δώσουμε θα είναι κοντά στο x_0.

Εδώ να παρατηρήσουμε ότι δε χρειάζεται, όπως στο παράδειγμά μας με τους αριθμούς a_ν, οι τιμές της μεταβλητής x να είναι τόσο «τακτοποιημένες» καθώς πλησιάζουν στον αριθμό x_0. Αν μία μεταβλητή παίρνει τιμές όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2 τότε και πάλι μπορούμε να πούμε ότι $x \to x_0$.

2.1.3 Σημεία συσσώρευσης ενός συνόλου

Σημεία συσσώρευσης που είναι πραγματικοί αριθμοί

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία μεταβλητή x που παίρνει τιμές στο σύνολο $A = (0,1) \cup (1,4]$. Θα μπορούσε τότε, για κάποια επιλογή τιμών για τη μεταβλητή x, να ισχύει

$$x \to 5;$$

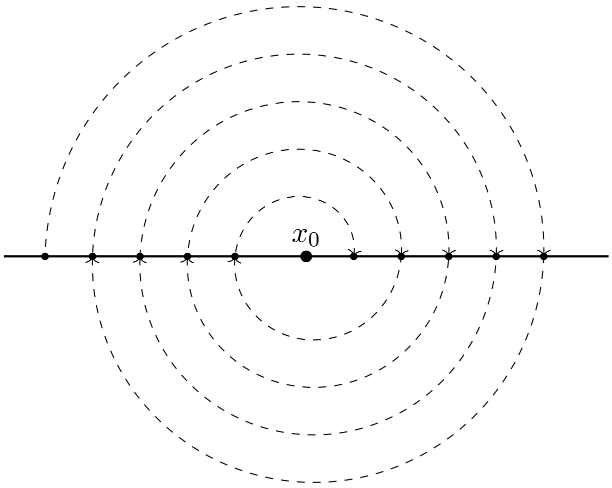
Ας σκεφτούμε ξανά τι σημαίνει ο συμβολισμός $x \to 5$. Πρέπει η x:

1. να παίρνει τιμές οσοσδήποτε κοντά στο 5 από ένα σημείο και μετά/

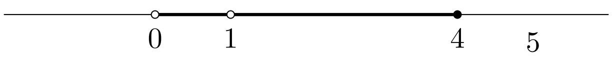
Όμως, δεδομένου ότι $x \in A$, δεν μπορούμε να πλησιάσουμε το 5 οσοδήποτε κοντά επιθυμούμε καθώς $x \leq 4$, άρα δεν μπορούμε να δώσουμε τιμές στην x που να είναι πιο κοντά στο 5 από ότι

[6] Όσοι έχετε αρκετή φαντασία, υποθέστε ότι τα βραχάκια είναι άπειρα στο πλήθος

[7] Αν φτάναμε στον στόχο μας, θα έλεγε κανείς ότι δε θα πλησιάζαμε αλλά θα είχαμε φτάσει.



Σχήμα 2.2: Λιγότερο «τακτοποιημένες» τιμές



Σχήμα 2.3: Το 1 είναι σημείο συσσώρευσης του A

το 4, άρα η απόσταση $|5 - x|$ του 5 από την x είναι μονίμως μεγαλύτερη ή ίση του 1. Έτσι, δεν μπορούμε, για καμμία επιλογή τιμών της x, να έχουμε $x \to 5$.

Μπορούμε μήπως να έχουμε $x \to 1$; Εδώ τα πράγματα είναι διαφορετικά. Αν και, πάλι, το 1 δεν ανήκει στο A, μπορούμε να πούμε ότι βρίσκεται «πολύ κοντά» στα στοιχεία του A, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.3. Για παράδειγμα, μπορούμε να δώσουμε στη μεταβλητή x τις τιμές:

$$(1.1, 1.01, 1.001, \ldots)$$

τότε παρατηρούμε ότι αυτές πλησιάζουν αυθαίρετα κοντά στο 1, χωρίς ποτέ να παίρνουν την τιμή 1. Μπορούμε επίσης να δώσουμε στην μεταβλητή x και τις ακόλουθες τιμές:

$$(0.9, 0.99, 0.999, \ldots)$$

οπότε και πάλι πλησιάζουμε αυθαίρετα κοντά στο 1 δίνοντας στην x τιμές από το A.

Ανάλογα, μπορούμε να πλησιάσουμε και το 0, δίνονται για παράδειγμα τις τιμές:

$$(0.1, 0.01, 0.001, \ldots)$$

που ανήκουν στο A. Δεν μπορούμε όμως να προσεγγίσουμε κανέναν άλλο αριθμό μικρότερο του 0 με τιμές μέσα από το A.

Ποιους άλλους αριθμούς μπορούμε να «πλησιάσουμε» δίνοντας σε μία μεταβλητή x τιμές μέσα από το A; Προφανώς, κάθε αριθμό[8] $x_0 \in A$. Έτσι, βλέπουμε ότι μπορούμε, να προσεγγίσουμε με τιμές από το A όλους τους αριθμούς που ανήκουν στο σύνολο

$$A' = [0, 4].$$

Αυτό το σύνολο το ονομάζουμε σύνολο των *σημείων συσσώρευσης* του A κι έτσι προκύπτει ο ακόλουθος

[8]Μπορείτε να βρείτε τιμές που μπορούμε να δώσουμε σε μια μεταβλητή x για να το πετύχουμε αυτό;

Ορισμός 2.2

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε ορίζουμε σαν σημείο συσσώρευσης του A κάθε αριθμό x τον οποίο μπορούμε να προσεγγίσουμε με τιμές μόνο από το A.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, όταν μιλάμε για προσέγγιση μίας μεταβλητής x σε έναν πραγματικό αριθμό x_0, εννοούμε ότι μπορούμε να δώσουμε στη μεταβλητή x τιμές οσοδήποτε κοντά στο x_0, χωρίς να δώσουμε ποτέ την τιμή x_0 και όλο αυτό το συμβολίζουμε με:

$$x \to x_0.$$

Σημεία συσσώρευσης που δεν είναι πραγματικοί αριθμοί

Θα εξετάσουμε εδώ σημεία συσσώρευσης ενός συνόλου που δεν είναι πραγματικοί αριθμοί. Ώπα! Και τι θα είναι άμα δεν είναι πραγματικοί αριθμοί; Δηλαδή, τι άλλο υπάρχει πια στα φετινά μαθηματικα!

Λοιπόν, ας πάρουμε το εξής σύνολο:

$$A = (6, +\infty)$$

το οποίο, με βάση τα όσα έχουμε πει ως τώρα έχει σημεία συσσώρευσης όλους τους αριθμούς του συνόλου:

$$A' = [6, +\infty).$$

Εδώ όμως, έχουμε μία ακόμα ιδιομορφία. Ας πάρουμε μία μεταβλητή x που παίρνει τιμές σε αυτό το διάστημα και ας της δώσουμε τις ακόλουθες τιμές:

$$(7, 8, 9, \ldots).$$

Τότε, προφανώς, σταδιακά, αυτή η μεταβλητή «ξεπερνά»[9] κάθε πραγματικό αριθμό, άρα, προφανώς, δεν πλησιάζει με την έννοια που ορίσαμε παραπάνω, κάποιον πραγματικό αριθμό. Σε αυτήν την περίπτωση, λοιπόν, δίνουμε τον ακόλουθο

Ορισμός 2.3

Αν x είναι μία μεταβλητή με τιμές σε ένα σύνολο A που περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ (για κάποιο $a \in \mathbb{R}$) τότε θα λέμε ότι η x *τείνει* στο $+\infty$ (συν άπειρο) αν για κάθε αριθμό $M \in \mathbb{R}$ η x παίρνει τελικά τιμές μεγαλύτερες από M. Συμβολικά, γράφουμε $x \to +\infty$.

Αντίστοιχα, ορίζουμε και το σύμβολο $x \to -\infty$, αλλά, επειδή, ως μαθηματικοί, βαριόμαστε απίστευτα, δίνουμε αυτόν τον ορισμό:

Ορισμός 2.4

Θα λέμε ότι μία μεταβλητή x με τιμές σε ένα σύνολο A που περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$ (για κάποιο $a \in \mathbb{R}$) αν

$$-x \to +\infty.$$

[9] Γίνεται μεγαλύτερη.

2.2 Η έννοια του ορίου συνάρτησης

2.2.1 x και $f(x)$ — μια σχέση... εξάρτησης

Είδαμε, ως τώρα, πώς μπορεί μία μεταβλητή να προσεγγίζει έναν αριθμό. Αυτή η μεταβλητή είναι αυτό που λέμε *ελεύθερη μεταβλητή*, δηλαδή παίρνει τιμές που εμείς επιλέγουμε να πάρει, χωρίς να καθορίζονται από κάτι άλλο[10]. Ασχοληθήκαμε όμως στο πρώτο κεφάλαιο με συναρτήσεις και αναφερθήκαμε και σε ένα άλλο είδος μεταβλητών: τις εξαρτημένες μεταβλητές. Για να θυμηθούμε λίγο καλύτερα, ας πάρουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \text{ημ}\, x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Εδώ έχουμε δύο ειδών μεταβλητές:

1. την ανεξάρτητη μεταβλητή x, που παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$ όπως εμείς θέλουμε και
2. την εξαρτημένη μεταβλητή $f(x)$, η οποία παίρνει τιμές *δεσμευόμενη* πάντα από την τιμή της[11] x.

Εδώ λοιπόν, τίθεται το εξής ερώτημα:

> Τώρα που δεν επιλέγουμε εμείς τις τιμές της $f(x)$ άμεσα, αλλά αυτές καθορίζονται και από εξωτερικούς παράγοντες, μπορούμε να έχουμε μία έννοια προσέγγισης της $f(x)$ σε κάποιον αριθμό ή σε κάποιο «άπειρο» ($\pm\infty$) καθώς εμείς επιλέγουμε τιμές για την μεταβλητή x;
>
> Με άλλα λόγια, *πώς συμπεριφέρεται η $f(x)$ καθώς η μεταβλητή x τείνει κάπου;*

Αυτό γενικά είναι ένα πολύ ενδιαφέρον ερώτημα που απασχολούσε και απασχολεί τις σύγχρονες επιστήμες εντόνως. Σκεφτείτε το ακόλουθο παράδειγμα: Σε κάποιο σημείο στον Κόλπο του Μεξικού, μία γεώτρηση πετρελαίου καταβυθίζεται λόγω μιας φυσικής καταστροφής με αποτέλεσμα το πετρέλαιο που θα παρήγαγε η πηγή να καταλήγει στην επιφάνεια της θάλασσας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργείται μία κυκλική πετρελαιοκηλίδα με κέντρο το σημείο στο οποίο βρισκόταν η γεώτρηση. Για να καταφέρουμε να υπολογίσουμε πόσο θα μας κοστίσει ο καθαρισμός της περιοχής, πρέπει να έχουμε μία εικόνα του πετρελαίου που βρίσκεται στη θάλασσα και, γι' αυτόν τον σκοπό έχει μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο εξαπλώνεται το πετρέλαιο επί της επιφάνειας της θάλασσας. Πιο συγκεκριμένα, σε απόσταση r μέτρων από την πηγή, το πάχος π της κηλίδας σε μέτρα δίνεται από τη σχέση:

$$\pi(r) = \frac{1}{2}\frac{r^2+3r}{r^3+r^2+4r},\ r > 0.$$

Για να έχουμε όμως και μία εικόνα της εξέλιξης του φαινομένου, θα ήταν χρήσιμο να ξέρουμε και το πάχος της κηλίδας στη θέση $r = 0$, όπου η δοσμένη σχέση δεν ισχύει. Μήπως υπάρχει κάποιος τρόπος να κάνουμε, έστω, μία εκτίμηση[12] του πάχους της κηλίδας εκεί;

Ας ξαναδούμε τώρα εκείνη την ερώτηση που θέσαμε παραπάνω. Αν μπορούσαμε να ξέρουμε πώς συμπεριφέρεται η συνάρτηση $\pi(r)$ καθώς το $r \to 0$, τότε θα μπορούσαμε να έχουμε μία εικόνα, ακόμα κι αν δεν είναι εντελώς σωστή, για το πόσο περίπου είναι το πάχος της κηλίδας σε εκείνο το σημείο[13]. Για να το πετύχουμε αυτό μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής:

---

[10] Όπως άνθρωπο, ανώτερη δύναμη ή άλλη μεταβλητή. Στα μαθηματικά μας απασχολεί κυρίως το τελευταίο.

[11] Επί της ουσίας, η δέσμευση αυτή προκύπτει από το πώς είναι ορισμένη η f — με άλλα λόγια από τον τύπο της.

[12] Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο υπό ποιες προϋποθέσεις, αυτές οι εκτιμήσεις είναι ορθές.

[13] Και γιατί δεν πάμε να το μετρήσουμε, βρε αδερφέ; Λόγω του έντονου στροβιλισμού του πετρελαίου σε εκείνη τη θέση, δεν είναι εύκολο να γίνει αυτό — στροβιλισμός ενός υγρού είναι, σε γενικές γραμμές, αυτό που κάνει το νερό της τουαλέτας όταν πατάμε το καζανάκι.

- Ξαναγράφουμε τον τύπο του πάχους π με μία μικρή απλοποίηση:

$$\pi(r) = \frac{1}{2}\frac{r(r+3)}{r(r^2+r+4)} = \frac{1}{2}\frac{r+3}{r^2+r+4}.$$

- Επιλέγουμε τώρα κάποιες θετικές τιμές για την μεταβλητή[14] r έτσι ώστε αυτή, παίρνοντας διαδοχικά αυτές τις τιμές, να προσεγγίζει το[15] 0. Διαισθητικά, είναι εύκολο να δούμε ότι αν $r \to 0$, τότε $r+3 \to 0+3 = 3$ καθώς το r μικραίνει όλο και περισσότερο, με αποτέλεσμα να είναι «τελικά αμελητέο» σε σχέση με το 3 και να μην «επηρεάζει» το $r+3$. Επίσης, με την ίδια αιτιολόγηση, μπορούμε να πούμε ότι $r+4 \to 0+4 = 4$ καθώς το $r \to 0$. Τέλος, δεδομένου ότι $r^2 = r \cdot r$, έχουμε, με παρόμοιο τρόπο, ότι $r^2 \to 0$ καθώς $r \to 0$. Άρα, τελικά:

$$\pi(r) = \frac{1}{2}\frac{r+3}{r^2+r+4} \xrightarrow{r\to 0} \frac{1}{2}\frac{0+3}{0+0+4} = \frac{3}{8},$$

  δηλαδή το πάχος της κηλίδας στην πηγή είναι περίπου 0.375 μέτρα ή, για την ακρίβεια, *τόσο εκτιμάμε εμείς ότι θα έπρεπε να είναι με βάση την κατάσταση στη γύρω περιοχή και χωρίς να έχουμε καμμία πληροφορία ή πρόσβαση στην πηγή* $(r = 0)$.

Από όλη την παραπάνω διαδικασία, καλό είναι να κρατήσουμε κάποια πράγματα:

- Η παραπάνω διαδικασία έγινε *χωρίς να λάβουμε συγκεκριμένες τιμές για τη μεταβλητή* r έτσι ώστε να πλησιάσουμε το 0. Έτσι εξασφαλίσαμε ότι αυτό που κάναμε δεν εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο πλησιάζουμε στο 0 αλλά από το ότι πλησιάζουμε στο 0. Με άλλα λόγια, με όποιον τρόπο και να δίναμε τιμές στην r, αν αυτές πλησίαζαν το 0, το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε για το $\pi(r)$.

- Δε χρειαστήκαμε — και δεν είχαμε — καμμία πληροφορία για τη συμπεριφορά του πετρελαίου στη θέση της πηγής $(r = 0)$. Αντιθέτως, κάναμε μία **εκτίμηση** με βάση το τι βλέπαμε να συμβαίνει **γύρω** από την πηγή και **όχι στην** πηγή.

- Το τελικό αποτέλεσμα το καθορίσαμε μόνο εν μέρει εμείς, με την επιλογή μας να αφήσουμε το r να τείνει στο 0. Σημαντικό ρόλο έπαιξε και ο τρόπος που ήταν κατασκευασμένη η $\pi(r)$, η οποία, όπως είπαμε είναι η *εξαρτημένη μεταβλητή*, δηλαδή αυτή που «ακολουθεί» τις μεταβολές της r.

- Το σημείο στο οποίο ψάχναμε να βρούμε το πάχος της κηλίδας ήταν ένα σημείο για το οποίο ξέραμε τι γινόταν «εκεί γύρω». Σε μαθηματική γλώσσα, η συνάρτηση $\pi(r)$ ήταν ορισμένη για $r > 0$, δηλαδή στο $A = (0, +\infty)$ και εμείς ψάχναμε τι συμβαίνει στο $r = 0$ δηλαδή σε ένα *σημείο συσσώρευσης* του A και όχι κάπου μακριά.

Έτσι, ακολουθώντας την πραπάνω διαδικασία, βρήκαμε ότι, καθώς $r \to 0$ έχουμε ότι $\pi(r) \to \frac{3}{8}$ ή, σε άλλο συμβολισμό:

$$\pi(r) \xrightarrow{r\to 0} \frac{3}{8}.$$

2.2.2 Όρια συναρτήσεων

Πεπερασμένα όρια

Λαμβάνοντας υπ' όψιν όλη την παραπάνω διαδικασία και τις μετέπειτα παρατηρήσεις, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό μαζί με έναν ακόμη, πιο εύχρηστο όπως θα φανεί στην πορεία, συμβολισμό[16]:

[14] Πάντα άπειρες, στο πλήθος

[15] Π.χ. $(2, 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, \ldots)$, αλλά όποιες και να πάρουμε, στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήξουμε.

[16] Όχι, δε μας έφταναν οι άλλοι δύο!

Ορισμός 2.5

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Τότε, αν για μία μεταβλητή x με τιμές στο A και $x \neq x_0$ ισχύει ότι για οποιαδήποτε επιλογή τιμών για την x έτσι ώστε $x \to x_0$ έχουμε $f(x) \to l$ για κάποιον, σταθερό, αριθμό l, τότε λέμε ότι το *όριο* της f καθώς το x τείνει στο x_0 *υπάρχει* και είναι l και γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Με άλλα λόγια, ο ορισμός μας λέει ότι για να ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

πρέπει, με όποιον τρόπο και αν επιλέξουμε εμείς να «πλησιάσουμε» το x_0 με την x, η $f(x)$ να πλησιάζει **πάντα** τον ίδιο αριθμό l.

Παρατήρηση 2.1. Στον ορισμό αναφέρουμε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αυτό σημαίνει ότι το x_0 μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός αλλά μπορεί να είναι και κάποιο από τα $\pm\infty$, δηλαδή $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Έτσι, έχει νόημα το παρακάτω:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x},$$

το οποίο μπορείτε, για εξάσκηση, να βρείτε πόσο κάνει χωρίς να διαβάσετε τίποτα από τα επόμενα.

$\square$

Άπειρα όρια

Όπως μία ανεξάρτητη μεταβλητή x μπορεί να τείνει σε κάποιο από τα $\pm\infty$, έτσι μπορεί να συμβαίνει και με μία εξαρτημένη μεταβλητή. Για παράδειγμα, αν πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, και μία μεταβλητή x με τιμές στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $x \to +\infty$, με κάποιον τρόπο, τότε και το x^2, από ένα σημείο και μετά, είναι μεγαλύτερο από κάθε πραγματικό αριθμό, άρα $x^2 \to +\infty$, δηλαδή $f(x) \to +\infty$. Ο αντίστοιχος ορισμός είναι ο εξής:

Ορισμός 2.6

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Τότε, αν για μία μεταβλητή x με τιμές στο A ισχύει ότι για οποιαδήποτε επιλογή τιμών για την x έτσι ώστε $x \to x_0$ έχουμε $f(x) \to +\infty$ τότε λέμε ότι το *όριο* της f καθώς το x τείνει στο x_0 *υπάρχει* και είναι $+\infty$ και γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Ανάλογα, έχουμε και τον ορισμό για το έτερο άπειρο, τον οποίο όμως, και πάλι επειδή βαριόμαστε, θα τον δώσουμε ως εξής:

Ορισμός 2.7

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

αν και μόνον αν

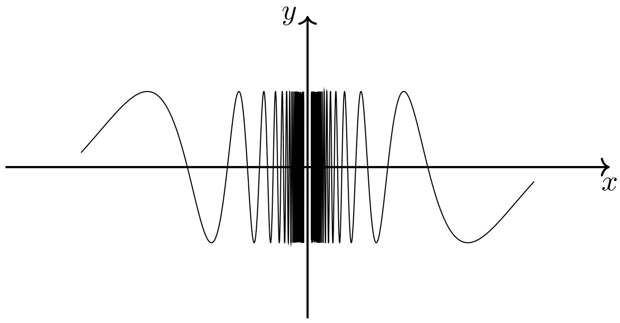
$$\lim_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty.$$

2.2.3 Υπάρχουν πάντα όρια;

Όταν μιλάμε για τη ζωή, ναι υπάρχουν πάντα τα όρια. Στα μαθηματικά, από την άλλη, τα πράγματα δεν είναι και τόσο σαφή. Όπως είδαμε και πριν, για να υπάρχει το όριο μίας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 πρέπει η $f(x)$ να τείνει στον ίδιο αριθμό ανεξάρτητα με τον τρόπο που η x τείνει στο x_0. Ε, πολλά ζητάμε. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την ακόλουθη συνάρτηση[17]:

$$f(x) = \text{ημ}\,\frac{1}{x},\ x \neq 0,$$

και, για να κάνουμε τη ζωή μας λίγο πιο εύκολη, στο σχήμα 2.4 φαίνεται η γραφική της παράσταση[18]. Βασικό της χαρακτηριστικό είναι ότι καθώς πλησιάζουμε στο 0, η γραφική της παράσταση κάνει άπειρα στο πλήθος «ανεβοκατεβάσματα» ανάμεσα στο -1 και το 1, γι' αυτό και αποφεύγουμε να τη σχεδιάζουμε πολύ κοντά στο 0 — όπως βλέπετε, θα έβγαινε απλά ένα μαύρο ορθογώνιο.



Σχήμα 2.4: Η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}\,\frac{1}{x}$

Ας προσπαθήσουμε τώρα να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Ας πάρουμε μία μεταβλητή $x \to 0$ και ας της δώσουμε τις ακόλουθες τιμές:

$$\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots\right).$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η $f(x)$ παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

$$\begin{aligned}&\left(\text{ημ}\,\frac{1}{1/\pi}, \text{ημ}\,\frac{1}{1/(2\pi)}, \text{ημ}\,\frac{1}{1/(3\pi)}, \ldots\right) = \\ &= (\text{ημ}\,\pi, \text{ημ}\,2\pi, \text{ημ}\,3\pi, \ldots) = \\ &= (0, 0, 0, \ldots),\end{aligned}$$

οπότε, $f(x) \to 0$. Άρα, υποπτευόμαστε ότι, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ τότε αυτό πρέπει να είναι ίσο με 0.

Ας δώσουμε τώρα στη μεταβλητή x τις ακόλουθες τιμές:

$$\left(\frac{1}{\pi/2}, \frac{1}{\pi + \pi/2}, \frac{1}{2\pi + \pi/2}, \ldots\right)$$

οπότε η $f(x)$ παίρνει τις τιμές:

$$\left(\text{ημ}\,\frac{1}{\frac{1}{\pi/2}}, \text{ημ}\,\frac{1}{\frac{1}{2\pi+\pi/2}}, \text{ημ}\,\frac{1}{\frac{1}{4\pi+\pi/2}}, \ldots\right) =$$

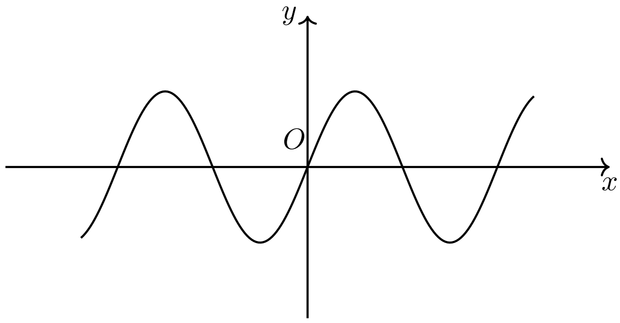
[17]Να τη θυμάστε, θα τη χρησιμοποιούμε πολύ συχνά από εδώ κι εμπρός!
[18]Αν και δεν είναι σε αυτές που μάθαμε στο κεφάλαιο 1.

$$= \left(\etaμ\frac{\pi}{2}, \etaμ\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right), \etaμ\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right), \ldots\right) =$$
$$= (1, 1, 1 \ldots),$$

οπότε, $f(x) \to 1$. Άρα, δεν υπάρχει το όριο της f καθώς το $x \to 0$, αφού στη μία περίπτωση δώσαμε κάποιες τιμές στην x έτσι ώστε $x \to 0$ και πήραμε ότι $f(x) \to 0$ και στην άλλη δώσαμε *κάποιες άλλες* τιμές στην x έτσι ώστε $x \to 0$ και πήραμε $f(x) \to 1$. Άρα, σε αυτήν την περίπτωση, ο τρόπος με τον οποίο προσεγγίζουμε το 0 με την x επηρεάζει το πού πάει το $f(x)$.

Άρα, το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει!

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $f(x) = \etaμ\, x$ η οποία έχει γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5: Η συνάρτηση $f(x) = \etaμ\, x$

Αυτή η γραφική παράσταση είναι αρκετά πιο ομαλή, ειδικά σε σχέση με την $f(x) = \etaμ\,\frac{1}{x}$, αλλά ίσως να μας κρύβει κι αυτή κάποιες εκπλήξεις. Ας υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Γι' αυτόν τον σκοπό, θεωρούμε μια μεταβλητή x που παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

$$(\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots)$$

η οποία, σαφώς τείνει στο $+\infty$. Σε αυτήν την περίπτωση, η $f(x)$ παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

$$(\etaμ\,\pi, \etaμ\,2\pi, \etaμ\,3\pi, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots)$$

οπότε, $f(x) \to 0$.

Ας δώσουμε τώρα στη μεταβλητή x τις τιμές:

$$\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi+\frac{\pi}{2}, 4\pi+\frac{\pi}{2}, \ldots\right)$$

οπότε η $f(x)$ παίρνει τις τιμές:

$$\left(\etaμ\frac{\pi}{2}, \etaμ\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right), \etaμ\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right), \ldots\right) = (1, 1, 1, \ldots)$$

οπότε $f(x) \to 1$, άρα, όπως και πριν, το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ δεν υπάρχει.

Αυτό θα μπορούσαμε να το είχαμε συμπεράνει και πάλι από την γραφική παράσταση της f παρατηρώντας ότι καθώς προχωράμε απεριόριστα προς τα δεξιά — δηλαδή καθώς $x \to +\infty$ — η $f(x)$ δεν πλησιάζει προς έναν αριθμό αλλά κινείται περιοδικά ανάμεσα στο -1 και το 1.

2.2.4 Βασικές ιδιότητες των ορίων

Άλγεβρα των (πεπερασμένων) ορίων

Η έννοια του ορίου, με τον έναν ή τον άλλο τρόπο, έχει να κάνει άμεσα με τους αριθμούς, επομένως, είναι αναμενόμενο να «κληρονομεί» και αρκετές από τις ιδιότητες των αριθμών και, ειδικότερα, όσες έχουν να κάνουν με τις πράξεις μεταξύ αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, παραθέτουμε στον πίνακα 2.1 τις βασικές πράξεις μεταξύ ορίων που έχουν νόημα, χωρίς να τις αποδείξουμε. Να παρατηρήσουμε ότι όσα αναγράφονται στον πίνακα 2.1 ισχύουν *με την προϋπόθεση ότι τα όρια* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x)$ *υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί*[19] — $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Πριν προχωρήσουμε παρακάτω,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} (\lambda f(x)) &= \lambda \lim_{x\to x_0} f(x) \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \\
\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \text{ αν } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0
\end{aligned}$$

Πίνακας 2.1: Άλγεβρα των ορίων

ας κάνουμε μερικές παρατηρήσεις για τις παραπάνω ιδιότητες.

Παρατήρηση 2.2. Όλες οι παραπάνω ιδιότητες μας δίνουν όχι μόνο έναν τρόπο για να υπολογίζουμε όρια αθροίσματος, γινομένου κ.λπ., αλλά μας δίνουν και την *ύπαρξη* των εν λόγω ορίων. Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι τα όρια:

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{x+5} \text{ και } \lim_{x\to 4} \sqrt{x^2+2x+9}$$

υπάρχουν, τότε γνωρίζουμε ότι και το όριο

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{x+5} + \sqrt{x^2+2x+9} \right)$$

υπάρχει.

□

Παρατήρηση 2.3. Όλοι οι παραπάνω κανόνες ισχύουν με την προϋπόθεση ότι η μεταβλητή x τείνει πάντα στον ίδιο σταθερό αριθμό x_0. Δηλαδή, δεν έχει νόημα να πούμε ότι, αφού υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x\to -1} (x^2+2) \text{ και } \lim_{x\to \pi} x$$

τότε υπάρχει και το όριο:

$$\lim_{x\to -1} (x^2+2+x)$$

ή, γενικότερα, για $x \to$οπουδήποτε.

□

Παρατήρηση 2.4. Από την ιδιότητα

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x),$$

[19] Με τα άπειρα όρια θα ασχοληθούμε σε λίγο.

για $g = f$, παίρνουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^2,$$

ενώ για $g = f^2$, παίρνουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f^3(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^3,$$

και, συνεχίζοντας έτσι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε — πάντα υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ — ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f^\nu(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^\nu.$$

□

Άλγεβρα των άπειρων ορίων

Σε όσα είπαμε παραπάνω, είχαμε πάρει ως προϋπόθεση ότι τα όρια υπάρχουν και επιπρόσθετα, ότι *είναι πραγματικοί αριθμοί.* Τι διαφορά θα είχαμε αν, αντιθέτως, τα όρια ήταν άπειρα; Για παράδειγμα, ας πάρουμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x \text{ και } g(x) = x^2,$$

για τις οποίες είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τώρα το όριο της συνάρτησης $g - f$. Αν πάμε να εφαρμόσουμε τους κανόνες που ισχύουν για τα πεπερασμένα όρια, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x) - f(x)) = \lim_{x\to x_0} g(x) - \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty - (+\infty)$$

και τώρα κολλήσαμε. Άμα αφαιρέσουμε $+\infty$ από $+\infty$ τι θα πάρουμε; Μηδέν; Ένα; Άπειρο; Μήπως δεν υπάρχει το όριο;

Για να διαφωτιστούμε λίγο, ας παρατηρήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)-f(x) = x^2 - x$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.6.

Από εδώ είναι, εν γένει, εμφανές ότι καθώς $x \to +\infty$ έχουμε και $g(x) - f(x) \to +\infty$, άρα,

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x) - f(x)) = +\infty$$

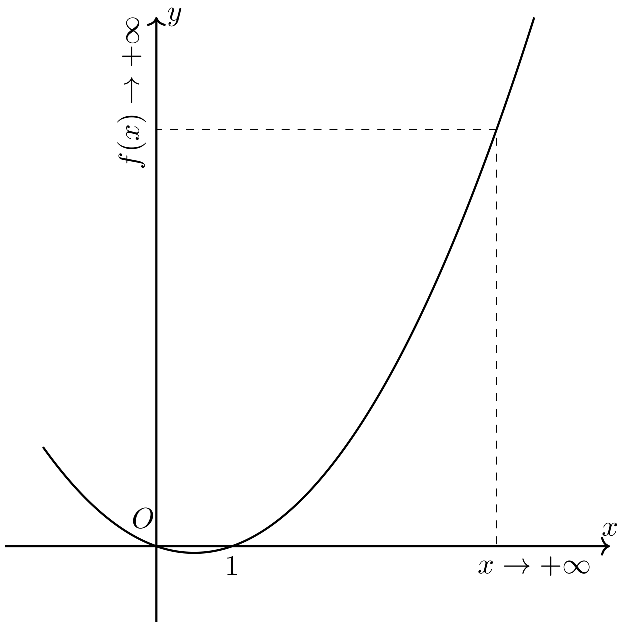
οπότε μπορούμε να πούμε ότι $+\infty - (+\infty) = +\infty$. Ή μήπως όχι; Ας πάρουμε τώρα τη διαφορά $f - g$, δηλαδή τη συνάρτηση $f(x) - g(x) = x - x^2$. Ακολουθώντας και πάλι τους κανόνες για τα πεπερασμένα όρια, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty - (+\infty)$$

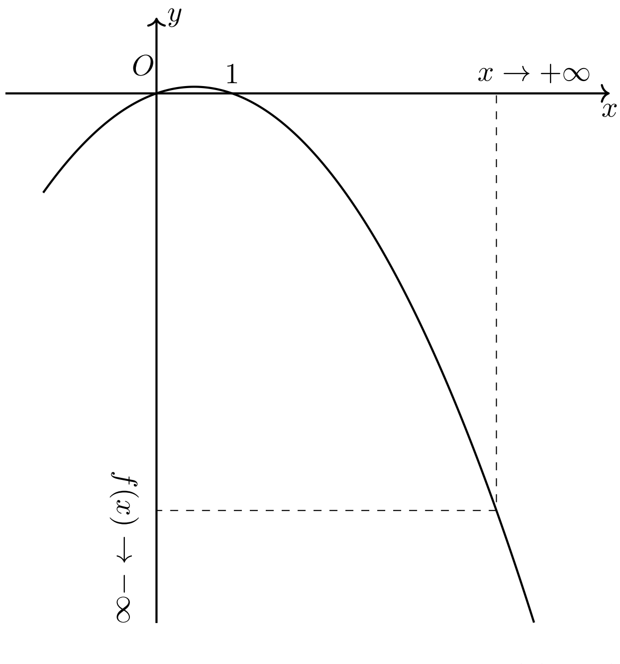
και εδώ, χρησιμοποιώντας τον κανόνα που επινοήσαμε πριν από λίγο, θα πάρουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = +\infty.$$

Για να δούμε και τη γραφική παράσταση της $f - g$... Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7 μάλλον κάτι κάναμε λάθος στους υπολογισμούς μας, καθώς, είναι εμφανές ότι καθώς η $x \to +\infty$, η $f(x) \to -\infty$,



Σχήμα 2.6: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) - f(x) = x^2 - x$.



Σχήμα 2.7: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) - g(x) = x - x^2$.

πράγμα που είναι και αναμενόμενο αν σκεφτεί κανείς ότι η γραφική παράσταση της $f-g$ είναι η συμμετρική της $g-f$ ως προς τον άξονα[20] $x'x$.

Επομένως, μάλλον δεν υπάρχει σαφής κανόνας για το τι ακριβώς συμβαίνει όταν έχουμε να κάνουμε με τη διαφορά δύο απείρων. Γενικά, οι μόνες «πράξεις» με τα άπειρα για τις οποίες μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι έχουν νόημα είναι αυτές που φαίνονται στους πίνακες 2.2.

$+$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	???
$-\infty$	???	$-\infty$

(α΄) Αθροίσματα απείρων

$\cdot$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

(β΄) Γινόμενα απείρων

Πίνακας 2.2: Πράξεις με τα άπειρα

Επίσης, έχουμε και την περίπτωση όπου το ένα μόνο όριο είναι άπειρο και το άλλο πεπερασμένο, όπως για παράδειγμα τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, σε ότι έχει να κάνει με το άθροισμα, τα πράγματα είναι απλά και σχετικά προφανή: υπερισχύει πάντα το άπειρο, όπως φαίνεται και στους πίνακες 2.3.

$+$	$+\infty$	$-\infty$
$a\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$

(α΄) Αθροίσματα αριθμών και απείρων

$\times$	$+\infty$	$-\infty$
$a>0$	$+\infty$	$-\infty$
$a<0$	$-\infty$	$+\infty$

(β΄) Γινόμενα αριθμών και απείρων

Πίνακας 2.3: Πράξεις με αριθμούς και άπειρα

Στον ίδιο πίνακα βλέπουμε και το πώς συμπεριφέρονται τα γινόμενα μεταξύ αριθμών και απείρων, που, για καλή μας τύχη, είναι όπως και το αναμενόμενο. Ένα πρόβλημα μόνο παρουσιάζεται στην περίπτωση όπου έχουμε να κάνουμε κάποια πράξη της μορφής $0\cdot\pm\infty$. Αν έχουμε και πάλι τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=x^2$, τότε, αν πάμε να εφαρμόσουμε τους συνήθεις κανόνες των πεπερασμένων ορίων θα καταλήξουμε σε μία τέτοια μορφή $(0\cdot(+\infty))$. Αν όμως εξετάσουμε πιο προσεκτικά την $f\cdot g$ θα δούμε ότι:

$$f(x)g(x)=\frac{1}{x}\cdot x^2=x\xrightarrow{x\to+\infty}+\infty.$$

Αν όμως πάρουμε για $g(x)=x$, τότε έχουμε:

$$f(x)g(x)=\frac{1}{x}\cdot x=1\xrightarrow{x\to+\infty}1.$$

Επομένως, δεν μπορούμε να διατυπώσουμε κανέναν εύκολο και σαφή κανόνα ούτε για τη μορφή $0\cdot\pm\infty$. Έτσι, στην περίπτωση των άπειρων ορίων, μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους κανόνες της άλγεβρας των ορίων μόνο όταν παραμένουμε σε κάποια από τις γνωστές μορφές και όχι σε κάποια άλλη. Αυτές τις μορφές που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα το όριο από κάποιον κανόνα — και είναι πολλές — τις ονομάζουμε *απροσδιόριστες μορφές* ή *απροσδιοριστίες* και θα τις μελετήσουμε ενδελεχώς στην ενότητα που αφορά τις τεχνικές υπολογισμού των ορίων. Για όποιον είναι περίεργος, όλες οι απροσδιοριστίες φαίνονται στον πίνακα 2.4.

[20] Για όσους δε θυμούνται γιατί, υπάρχει η σχετική αιτιολόγηση στο πρώτο κεφάλαιο.

$+\infty - (+\infty)$	$-\infty - (-\infty)$	$\frac{0}{0}$
$0 \cdot (\pm\infty)$	0^0	$0^{\pm\infty}$
$(\pm\infty)^0$	$(\pm\infty)^{\pm\infty}$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Πίνακας 2.4: Όλες οι απροσδιόριστες μορφές που θα μας απασχολήσουν.

Εδώ να σημειώσουμε ότι, τα ακόλουθα δεν είναι απροσδιόριστες μορφές:

$$\frac{a}{\pm\infty}, \frac{\pm\infty}{0^+}, \frac{\pm\infty}{0^-}, \ a \in \mathbb{R},$$

όπως επίσης και τα:

$$\frac{a}{0^+}, \frac{a}{0^-}, \ a \neq 0,$$

όπου με 0^+ εννοούμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και, αντίστοιχα, με 0^- ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0. Για την ακρίβεια, τα αποτελέσματα των παραπάνω πράξεων συνοψίζονται στον πίνακα 2.5.

Μορφή	**Αποτέλεσμα**
$\frac{a}{+\infty}$	0
$\frac{a}{-\infty}$	0
$\frac{\pm\infty}{0^+}$	$\pm\infty$
$\frac{\pm\infty}{0^-}$	$\mp\infty$

(α΄) Πηλίκα με $\pm\infty$

$\div$	0^+	0^-
$a > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$a < 0$	$-\infty$	$+\infty$

(β΄) Πηλίκα με 0 στον παρονομαστή

Πίνακας 2.5: Πηλίκα που «μοιάζουν» αλλά δεν είναι απροσδιοριστίες

2.2.5 Μερικά βασικά αποτελέσματα για τα όρια

Είδαμε τις βασικές ιδιότητες των πράξεων μεταξύ ορίων, οι οποίες, σε μεγάλο βαθμό, πηγάζουν από τις αντίστοιχες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών και τον τρόπο με τον οποίο μεταφέρονται αυτές στις συναρτήσεις. Καιρός τώρα να ασχοληθούμε με ιδιότητες των ορίων που έχουν πολύ μεγαλύτερη σχέση με την έννοια του ορίου, δηλαδή την έννοια της προσέγγισης ή, ακόμα καλύτερα, της εκτίμησης.

Τοπική συμπεριφορά των συναρτήσεων

Όπως είδαμε και στο παράδειγμα με την πετρελαιοκηλίδα, η έννοια του ορίου μας είναι πολύ χρήσιμη για να εκτιμήσουμε μία κατάσταση γύρω από ένα σημείο για το οποίο δεν έχουμε (και συνήθως δεν μπορούμε να αποκτήσουμε) κάποια πληροφορία. Εδώ λοιπόν θα δούμε κάποια αποτελέσματα που έχουν να κάνουν με αυτό ακριβώς· είτε μας δίνουν κάποια ποιοτική πληροφορία για τη συνάρτηση μέσω της γνώσης κάποιου ορίου είτε μας δίνουν κάποια πληροφορία για ένα όριο δεδομένης κάποιας πληροφορίας για τη συνάρτηση.

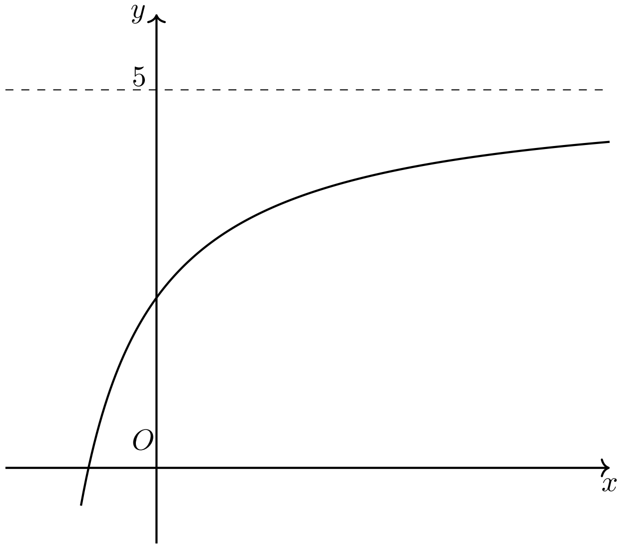
Πρόταση 2.1

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης του A και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι θετικό τότε και η συνάρτηση είναι θετική κοντά στο x_0, δηλαδή:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ για } x \text{ κοντά στο } x_0.$$

Δεν θα παραθέσουμε την απόδειξη της παραπάνω πρότασης αλλά μπορούμε να αιτιολογήσουμε την ισχύ της ως εξής: Αφού το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ είναι θετικό, σημαίνει ότι η (εξαρτημένη) μεταβλητή $f(x)$ τείνει σε κάποιον θετικό αριθμό (ή στο $+\infty$) και, άρα, «από ένα σημείο και μετά» παίρνει μόνο θετικές τιμές. Το κλειδί βρίσκεται στο «από ένα σημείο και μετά». Τι σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι, καθώς το $x \to x_0$, μπαίνει, μοιραία, σε μια περιοχή γύρω από το x_0 στην οποία, όλες οι τιμές της $f(x)$ είναι θετικές.

Για παράδειγμα, ας πάρουμε τη συνάρτηση με γραφική παράσταση όπως αυτή στο σχήμα 2.8 η οποία, από ένα σημείο και μετά, παίρνει μόνο θετικές τιμές, καθώς $5 > 0$.



Σχήμα 2.8: Η συνάρτηση f με $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 5$.

Εντελώς ανάλογα, έχουμε και την ακόλουθη[21]

Πρόταση 2.2

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης του A και το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι αρνητικό τότε και η συνάρτηση είναι αρνητική κοντά στο x_0, δηλαδή:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \text{ για } x \text{ κοντά στο } x_0.$$

Τέλος, έχουμε και το κατά μία έννοια αντίστροφο των παραπάνω προτάσεων:

Πρόταση 2.3

Αν $f, g : A \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A και $f(x) \leq g(x)$ (ή $f(x) < g(x)$) κοντά στο x_0 τότε και:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x),$$

εφ' όσον τα όρια υπάρχουν.

[21] Οι δύο αυτές προτάσεις, για όσους έτυχε να προβληματιστούν, μας δίνουν και ένα πιο γενικό συμπέρασμα το οποίο συνοψίζεται ως εξής:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

Αυτό ξεκαθαρίζει και το γιατί στον κανόνα για το όριο πηλίου απαιτούμε απλώς το όριο της g (του παρονομαστή) να είναι μη μηδενικό και δεν απαιτούμε γενικά να είναι η g μη μηδενική.

Κριτήριο Παρεμβολής

Σελίδες επί σελίδων μπορούν να γραφτούν για το κριτήριο παρεμβολής και τη συμβολή του στη μαθηματική επιστήμη, τόνοι μελάνης έχουν χυθεί για να εξυμνηθεί η σημασία του και... Εντάξει, ίσως υπερβάλλουμε λίγο αλλά όπως και να έχει, είναι ένα σημαντικό κριτήριο που μας βοηθά και στο να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός ορίου αλλά και στο να το υπολογίσουμε.

Πρόταση 2.4: Κριτήριο Παρεμβολής

Έστω τρεις συναρτήσεις $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Έστω επίσης ότι ισχύει:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

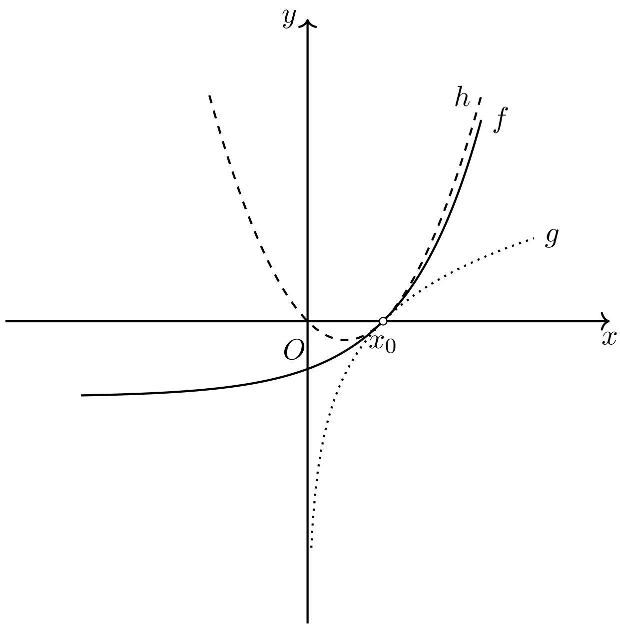
κοντά στο x_0 και ότι τα όρια των g, h στο x_0 υπάρχουν και:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \lambda.$$

Τότε, το όριο της f στο x_0 ισχύει και μάλιστα:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda.$$

Επειδή μαζεύτηκαν πολλά, για να ρίξουμε μια ματιά στο σχήμα 2.9.



Σχήμα 2.9: Το κριτήριο παρεμβολής — $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Η ιδέα του κριτηρίου παρεμβολής, μέσα από ένα σχήμα είναι παραπάνω από προφανής· αν δύο συναρτήσεις «συμπιέζουν» μία άλλη συνάρτηση καθώς πλησιάζουν σε ένα σημείο (συσσώρευσης) τότε δεν μπορεί παρά και η ενδιάμεση συνάρτηση[22] να τείνει προς τον ίδιο αριθμό, (λ).

[22] Το «ζαμπόν» στο σάντουιτς, αν φανταστούμε τις άλλες δύο σαν «ψωμάκια».

2.2.6 Πλευρικά όρια

Πολλές φορές, σε πραγματικά προβλήματα, ενδέχεται να έχουμε τη δυνατότητα να προσεγγίσουμε μία τιμή μόνο από τιμές μεγαλύτερες ή μόνο από τιμές μικρότερες. Πάρτε για παράδειγμα το πρόβλημα με την πετραιλοκηλίδα που αντιμετωπίσαμε παραπάνω. Εκεί, είχαμε τον λογικό περιορισμό $r > 0$, καθώς η μεταβλητή r αναφέρεται στην απόσταση από την πηγή της πετρελαιοκηλίδας. Έτσι, σε αυτήν την περίτπωση, οποιεσδήποτε τιμές και να δώσουμε στη μεταβλητή r έτσι ώστε αυτές να τείνουν στο 0, θα έχουμε επιπρόσθετα τη συνθήκη $r > 0$. Για ευκολία, αυτό το συμβολίζουμε $r \to 0^+$, δηλαδή:

$$r \to 0^+ \Leftrightarrow r \to 0 \text{ και } r > 0.$$

Αντίστοιχα, για μία μεταβλητή που παίρνει τιμές μόνο μικρότερες του 0 θα είχαμε:

$$t \to 0^- \Leftrightarrow r \to 0 \text{ και } r < 0.$$

Γενικότερα, δίνουμε τον ακόλουθο

Ορισμός 2.8: Πλευρική προσέγγιση

Αν μία μεταβλητή x τείνει σε έναν αριθμό x_0 και παίρνει τιμές μεγαλύτερες του x_0 $(x > x_0)$ τότε λέμε ότι το x τείνει από δεξιά στο x_0 και γράφουμε:

$$x \to x_0^+.$$

Ανάλογα ορίζουμε και την προσέγγιση από αριστερά:

Ορισμός 2.9: Πλευρική προσέγγιση

Αν μία μεταβλητή x τείνει σε έναν αριθμό x_0 και παίρνει τιμές μικρότερες του x_0 $(x < x_0)$ τότε λέμε ότι το x τείνει από αριστερά στο x_0 και γράφουμε:

$$x \to x_0^-.$$

Εδώ είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε τη σχέση που έχουν τα πλευρικά όρια μίας συνάρτησης f στον ίδιο αριθμό x_0 με το όριο της f στο x_0. Για παράδειγμα, ας πάρουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in (-3,1) \\ 1 - \frac{1}{2}x^2 & x \in (1,3) \end{cases}$$

η οποία έχει γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 2.10.

Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλευρικό όριο:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (1+x) = 1+1 = 2,$$

και το πλευρικό όριο:

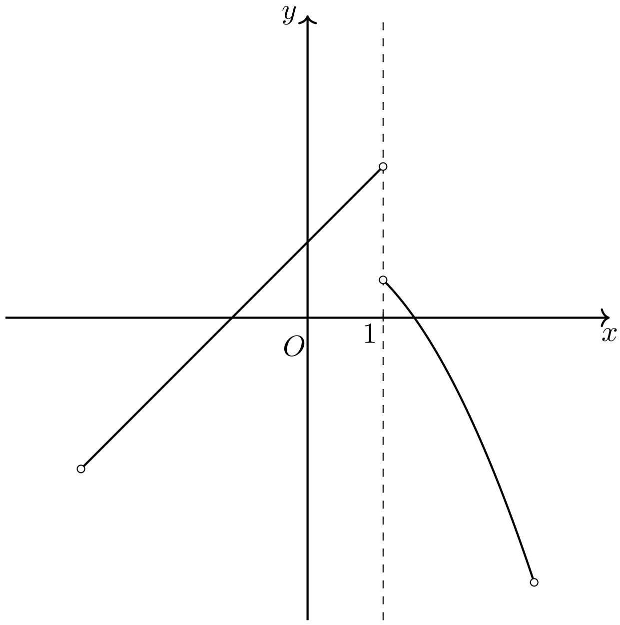
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

δεν μπορούμε, όμως, να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

καθώς, αν δώσουμε στη μεταβλητή x τιμές που προσεγγίζουν το 1 από αριστερά, όπως: για παράδειγμα:

$$(0.5, 0.75, 0.875, \ldots)$$



Σχήμα 2.10: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

τότε οι τιμές $f(x)$ θα πλησιάζουν το 1 (το αριστερό πλευρικό όριο) ενώ αν δώσουμε τιμές που προσεγγίζουν το 1 από δεξιά, όπως:

$$(1.5, 1.25, 1.125, \ldots)$$

τότε οι τιμές $f(x)$ θα πλησιάζουν το $\frac{1}{2}$ (το δεξί πλευρικό όριο) και, επομένως, το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.

Αν όμως τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα, αυτό το πρόβλημα δεν υπάρχει πια και είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι τότε το όριο υπάρχει. Μάλιστα, ισχύει και η ακόλουθη

Πρόταση 2.5

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του A. Τότε, το όριο της f στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια στο x_0 υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} = \lambda = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

2.3 Τεχνικές υπολογισμού ορίων

2.3.1 Όρια βασικών συναρτήσεων

Μελετήσαμε αρκετά τις ιδιότητες των ορίων. Ώρα να περάσουμε σιγά—σιγά στην πράξη και να μάθουμε πώς να βρίσκουμε όρια με έναν πιο συστηματικό τρόπο. Αρχικά, λοιπόν, θα υπολογίσουμε τα όρια κάποιων βασικών συναρτήσεων.

Όριο σταθερή συνάρτησης

Έστω $c \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$. Έστω επίσης και ένα $x_0 \in \mathbb{R}$. Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι για μία μεταβλητή x που τείνει στο x_0, με οποιονδήποτε τρόπο, η $f(x)$ παίρνει συνεχώς την τιμή c. Επομένως:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c.$$

Όριο της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$

Έστω η ταυτοτική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ και έστω ένα $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν μία μεταβλητή $x \to x_0$ είναι προφανές ότι και η $f(x) = x \to x_0 = f(x_0)$, επομένως:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0).$$

Όριο γραμμικών συναρτήσεων $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

Εφ' όσον τα όρια των x και b υπάρχουν σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, από την άλγεβρα των ορίων έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} (ax + b) = \lim_{x \to x_0} (ax) + \lim_{x \to x_0} b = \\ &= a \lim_{x \to x_0} x + b = ax_0 + b = f(x_0). \end{aligned}$$

Όριο μονωνύμου $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$

Αφού υπάρχει το όριο της x σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, από την άλγεβρα των ορίων και τις παρατηρήσεις που κάναμε μετά έχουμε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} x^\nu = \left(\lim_{x \to x_0} x \right)^\nu = x_0^\nu = f(x_0).$$

Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_\nu x^\nu$

Αφού υπάρχουν τα όρια των x^μ για κάθε $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$ και σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, από την άλγεβρα των ορίων έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1 x + \ldots a_\nu x^\nu) = \\ &= \lim_{x \to x_0} a_0 + \lim_{x \to x_0} a_1 x + \ldots + \lim_{x \to x_0} a_\nu x^\nu = \\ &= a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_\nu x_0^\nu = f(x_0). \end{aligned}$$

Όριο ρητής συνάρτησης $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Από τα προηγούμενα και το γεγονός ότι σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ που δεν είναι ρίζα του παρονομαστή (δηλαδή $q(x_0) \neq 0$) έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} q(x) = q(x_0) \neq 0$, προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)},$$

για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $q(x_0) \neq 0$.

Όριο $\nu-$οστής ρίζας $f(x) = \sqrt[\nu]{x}$, $\nu \in \mathbb{N}$

Εδώ τα πράγματα ζορίζουν λίγο στο θέμα της απόδειξης και γι' αυτό θα δεχτούμε ότι για κάθε[23] $x_0 \in [0, +\infty)$

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{x} = \sqrt[\nu]{x_0}.$$

Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Θα δεχτούμε χωρίς απόδειξη[24] τα δύο ακόλουθα όρια — σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} \text{ημ}\, x = \text{ημ}\, x_0$$
$$\lim_{x \to x_0} \text{συν}\, x = \text{συν}\, x_0.$$

Από εδώ και τον κανόνα για το πηλίκο ορίων προκύπτει εύκολα ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \text{εφ}\, x = \text{εφ}\, x_0,$$

για τα $x_0 \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\text{συν}\, x_0 \neq 0$ και

$$\lim_{x \to x_0} \text{σφ}\, x = \text{σφ}\, x_0,$$

για τα $x_0 \in \mathbb{R}$ για τα οποία $\text{ημ}\, x_0 \neq 0$.

Όρια εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων

Επειδή κι εδώ οι αποδείξεις είναι ιδιαίτερα κοπιαστικές και έξω από το πνεύμα της προσέγισσής μας στα όρια, απλώς παραθέτουμε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$$
$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0,$$

για $0 < a \neq 1$. Εδώ, είναι χρήσιμο να έχουμε κατά νου και τα όρια των παραπάνω συναρτήσεων στα $\pm\infty$, όταν αυτά έχουν νόημα. Πιο συγκεκριμένα:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \text{ και } \lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \text{ για } a > 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \text{ και } \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \text{ για } 0 < a < 1,$$

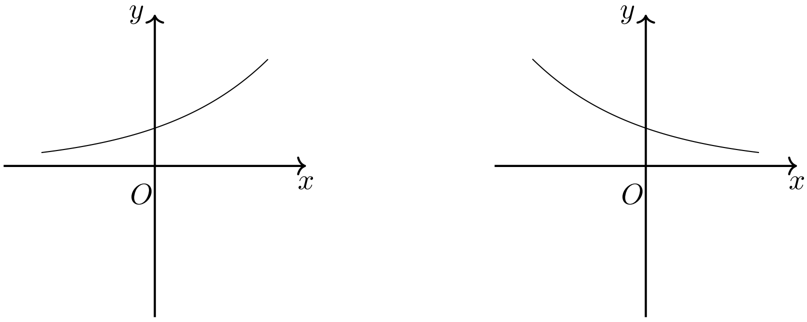
όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.11. Επίσης, για τις λογαριθμικές συναρτήσεις έχουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \text{ και } \lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \text{ για } a > 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \text{ και } \lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty \text{ για } 0 < a < 1,$$

όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.12.

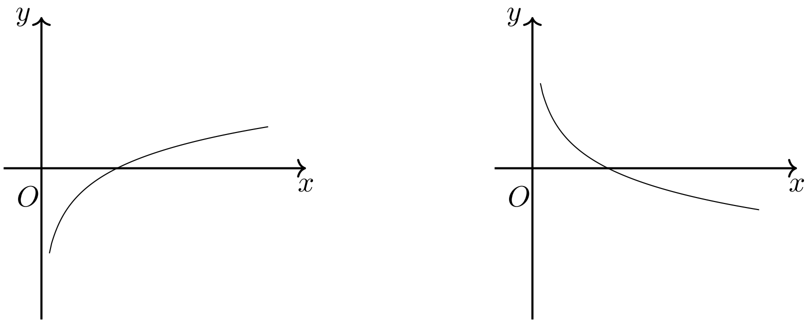
[23] Αυτή η «παράνοια» με το ότι η $\nu-$οστή ρίζα ορίζεται μόνο στο $[0, +\infty)$ είναι ένα ζήτημα του σχολικού βιβλίου. Για περιττούς εκθέτες, η $\nu-$οστή ρίζα είναι πολύ καλά ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$.

[24] Η απόδειξη είναι και κουραστική και αρκετά τεχνική, αν και έχει ένα ενδιαφέρον. Για περισσότερα, μπορείτε να δείτε το σχολικό βιβλίο.



(α′) $a > 1$ (β′) $0 < a < 1$

Σχήμα 2.11: Οι εκθετικές συναρτήσεις



(α′) $a > 1$ (β′) $0 < a < 1$

Σχήμα 2.12: Οι λογαριθμικές συναρτήσεις

Όριο της συνάρτησης $f(x) = x^a$, με $a \neq 0$

Και σε αυτήν την περίπτωση, δίνουμε το παρακάτω όριο χωρίς να προχωρήσουμε σε κάποιου είδους απόδειξη:

$$\lim_{x \to x_0} x^a = x_0^a,$$

για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Όρια της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$

Εδώ έχουμε διάφορα ενδιαφέροντα όρια να δούμε. Αρχικά, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\nu} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0,$$

το οποίο θα το χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη.

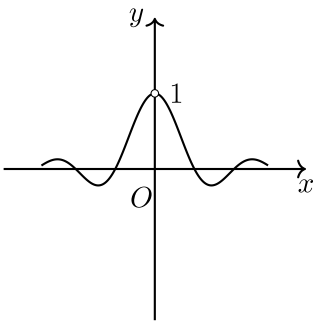
Τώρα, για $x \to 0$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν ο ν είναι άρτιος, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

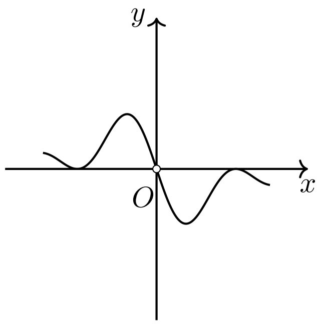
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^\nu} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^\nu} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^\nu} = +\infty.$$

2. Αν ο ν είναι περιττός, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^\nu} = +\infty \text{ και } \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^\nu} = -\infty$$



(α′) Η $f(x) = \frac{\text{ημ}\,x}{x}$



(β′) Η $f(x) = \frac{\text{συν}\,x - 1}{x}$

Σχήμα 2.13: Δύο ακόμα γνωστά όρια

και, συνεπώς, το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^\nu}$$

δεν υπάρχει.

Όρια που θεωρούνται γνωστά

Επιπροσθέτως, μαζί με όλα τα προηγούμενα, θεωρούνται γνωστά, χωρίς απόδειξη, τα ακόλουθα όρια:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{ημ}\,x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{συν}\,x - 1}{x} = 0$$

τα οποία θα τα δούμε υπό ένα άλλο πλαίσιο σε επόμενο κεφάλαιο. Πάντως, αν κανείς έχει τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων, όπως φαίνονται στο σχήμα 2.13 μπορεί εύκολα να επαληθεύσει τους παραπάνω ισχυρισμούς.

2.3.2 Όριο σύνθετης συνάρτησης

Ως εδώ, έχουμε μάθει ήδη αρκετά βασικά όρια και, μαζί με την άλγεβρα των ορίων, μπορούμε να υπολογίσουμε μια πληθώρα ορίων που προκύπτουν σαν άθροισμα, γινόμενο ή πηλίκο βασικών συναρτήσεων. Τι θα γίνει όμως αν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα όριο όπως το παρακάτω:

$$\lim_{x\to 1} \text{ημ}\left(\frac{\pi}{x}\right);$$

Φαίνεται απλό αλλά δεν έχουμε κάποια πρόταση/κανόνα που να μας λέει τι να κάνουμε στην περίπτωση που είμαστε αντιμέτωποι με τη σύνθεση δύο συναρτήσεων. Γι' αυτόν τον σκοπό, θα χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη, το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.1: Όριο σύνθετης συνάρτησης

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις με $f(A) \cap B \neq \varnothing$ και x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης του A τέτοιο ώστε να υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

και να υπάρχει επίσης και το όριο:

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = \lambda \in \mathbb{R}$$

και, επιπρόσθετα, $f(x) \neq y_0$ κοντά στο x_0 τότε το όριο της $f \circ g$ στο x_0 υπάρχει και μάλιστα:

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y \to y_0} g(y) = \lambda.$$

Γενικά, δεν είναι δύσκολο να πειστεί κανείς για την ισχύ του παραπάνω, τουλάχιστον σε διαισθητικό επίπεδο. Η μόνη «μυστήρια» υπόθεση είναι αυτή που λέει ότι πρέπει να έχουμε «$f(x) \neq y_0$ κοντά στο x_0». Γιατί; Τι πειράζει;

Ας θυμηθούμε λίγο πώς ορίσαμε την έννοια του «πλησιάζειν»: θέλαμε η μεταβλητή x να παίρνει τιμές αυθαίρετα κοντά στο x_0 και, επιπρόσθετα, *να μην παίρνει ποτέ την τιμή* x_0. Έτσι, για να έχει νόημα το όριο της $f \circ g$ πρέπει η $g(x)$ να τείνει στο y_0 με την παραπάνω έννοια, δηλαδή να μην παίρνει ποτέ[25] την τιμή y_0.

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x \to 1} \text{ημ}\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

1. Θέτουμε $g(x) = \frac{\pi}{x}$ και υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\pi}{x} = \pi (= y_0).$$

2. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{y \to \pi} \text{ημ}\, y = \text{ημ}\, \pi = 0 (= \lambda).$$

3. Αφού $g(x) = \frac{\pi}{x} \neq \pi$ για x κοντά στο 1, από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$\lim_{x \to 1} \text{ημ}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0.$$

Παρατήρηση 2.5. Από εδώ και στο εξής, δε θα σχολιάζουμε το τρίτο βήμα της παραπάνω διαδικασίας μιας και θα ασχολούμαστε, ως επί το πλείστον, με συναρτήσεις που ικανοποιούν αυτήν την ιδιότητα.

□

Ας δούμε τώρα κάποια ακόμα παραδείγματα:
Παράδειγμα 2.1. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} e^{\text{συν}\, x}.$$

Διαδοχικά:

[25] Πρακτικά, μπορεί να πάρει την τιμή y_0 κάποιες φορές, αρκεί αυτές να είναι πεπερασμένες στο πλήθος· αυτήν την έννοια έχει το «κοντά στο x_0» στη διατύπωση του θεωρήματος.

1. Θέτουμε $g(x) = \text{συν}\, x$ και υπολογίζουμε το όριο:
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \text{συν}\, x = \text{συν}\, \frac{\pi}{2} = 0.$$
2. Υπολογίζουμε το όριο:
$$\lim_{y\to 0} e^y = e^0 = 1,$$
οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\text{συν}\, x} = 1.$$

□

Παράδειγμα 2.2. Να υπολογισθεί το όριο:
$$\lim_{x\to 0^+} \ln(\sqrt{x} + x^2).$$
Διαδοχικά:

1. Θέτουμε $g(x) = \sqrt{x} + x^2$ και υπολογίζουμε το όριο:
$$\lim_{x\to 0^+} (\sqrt{x} + x^2) = 0 + 0 = 0.$$
2. Υπολογίζουμε το όριο:
$$\lim_{y\to 0} \ln y = -\infty,$$
οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:
$$\lim_{x\to 0} \ln(\sqrt{x} + x^2) = -\infty.$$

□

Παράδειγμα 2.3. Να υπολογισθεί το όριο:
$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{e^x + x}{x+1}.$$
Διαδοχικά, έχουμε:

1. Θέτουμε $g(x) = \frac{e^x+x}{x+1}$ και υπολογίζουμε το όριο:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + x}{x+1} = \frac{e^0 + 0}{0+1} = 1.$$
2. Υπολογίζουμε το όριο:
$$\lim_{y\to 1} \ln y = \ln 1 = 0,$$
οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:
$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{e^x + x}{x+1} = 0.$$

□

Παράδειγμα 2.4. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to\pi} 2\,\text{συν}\left(\frac{\text{ημ}\,x+x}{x/\pi}\right).$$

Διαδοχικά, έχουμε:

1. Θέτουμε $g(x)=\frac{\text{ημ}\,x+x}{\pi x-1/2}$ και υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\text{ημ}\,x+x}{x/\pi}=\frac{\text{ημ}\,\pi+\pi}{\pi/\pi}=\frac{0+\pi}{1}=\pi.$$

2. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{y\to\pi} 2\,\text{συν}\,y = 2\,\text{συν}\,\pi=-2,$$

οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:

$$\lim_{x\to\pi} 2\,\text{συν}\left(\frac{\text{ημ}\,x+x}{x/\pi}\right)=-2.$$

□

Παράδειγμα 2.5. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 4}\ln\left(x^2+\text{συν}(x-4)\right).$$

Διαδοχικά, έχουμε:

1. Θέτουμε $g(x)=x^2+\text{συν}(x-4)$ και εδώ παρατηρούμε ότι και αυτή η συνάρτηση είναι σύνθεση απλούστερων συναρτήσεων. Επομένως, για να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 4}(x^2+\text{συν}(x-4))$$

πρέπει να κάνουμε ένα ακόμα βήμα:

(α΄) Θέτουμε $h(x)=x-4$ και υπολογίσουμε το

$$\lim_{x\to 4}(x-4)=4-4=0.$$

(β΄) Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{u\to 0}\text{συν}\,u=\text{συν}\,0=1$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 4}\text{συν}(x-4)=1.$$

Άρα:

$$\lim_{x\to 4}(x^2+\text{συν}(x-4))=4^2+\lim_{x\to 4}\text{συν}(x-4)=16+1=17.$$

2. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{y\to 17}\ln y=\ln 17,$$

οπότε το όριο που ψάχνουμε υπάρχει και είναι:

$$\lim_{x\to 4}\ln\left(x^2+\text{συν}(x-4)\right)=\ln 17.$$

□

2.3.3 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\frac{0}{0}$

Είδαμε στον πίνακα 2.4 όλες τις απροσδιόριστες μορφές. Μία από αυτές είναι και η μορφή $\frac{0}{0}$ η οποία παρουσιάζεται, για παράδειγμα, στην ακόλουθη περίπτωση:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-6x}{x^2-4x+3}$$

όπου, αν και έχουμε ρητή συνάρτηση, πάμε να υπολογίσουμε το όριό της σε μία ρίζα του παρονομαστή, πράγμα που μας κάνει τη ζωή πιο δύσκολη. Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση, το να αξιοποιήσουμε την άλγεβρα των ορίων μας οδηγεί σε απρσδιόριστη μορφή, μιας και:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-6x}{x^2-4x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}2x^2-6x}{\lim\limits_{x\to 3}x^2-4x+3}=\frac{0}{0}.$$

Κι εδώ αρχίζει το μυστήριο... Τι θα κάνουμε τώρα; Κατά βάση, ο στόχος μας σε κάθε μορφή απροσδιοριστίας είναι κάνουμε διάφορους *αλγεβρικούς χειρισμούς* έτσι ώστε να ξαναγράψουμε τον τύπο της συνάρτησης χωρίς να έχουμε μέσα τουλάχιστον ένα από τα δύο 0. Εδώ μπορούμε να εργαστούμε παραγοντοποιώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή:

$$\frac{2x^2-6x}{x^2-4x+3}=\frac{2x(x-3)}{(x-1)(x-3)},$$

και στη συνέχεια μπορούμε να απλοποιήσουμε τον «ενοχλητικό» παράγοντα:

$$\frac{2x(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\frac{2x}{x-1}.$$

Εδώ βλέπουμε ότι δεν έχουμε κανένα θέμα να υπολογίσουμε το όριο καθώς $x\to 3$, αφού:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x}{x-1}=\frac{2\cdot 3}{3-1}=3,$$

επομένως:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-6x}{x^2-4x+3}=3.$$

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα όπου παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.
Παράδειγμα 2.6. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$$

Εδώ δεν είναι τόσο προφανής η παραγοντοποίηση όσο θα ήταν σε μία ρητή συνάρτηση. Ωστόσο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή, δηλαδή την παράσταση $\sqrt{x}+1$. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με αυτήν έχουμε:

$$\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\sqrt{x}+1.$$

Εδώ όμως δεν έχουμε πια την απροσδιόριστη μορφή, επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=1+1=2.$$

□

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	-3	$-$	0	$+$	
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$	ΔΕΝ	$\frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2}$	ΔΕΝ	$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$	

Πίνακας 2.6: Πίνακας της $f(x) = \frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}$

Παράδειγμα 2.7. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}.$$

Εδώ θα μιμηθούμε το παραπάνω «κόλπο» με τη συζηγή παράσταση απλώς, επειδή έχουμε δύο παραστάσεις με ριζικά, θα πολλαπλασιάσουμε και με τις δύο συζυγείς παραστάσεις $\sqrt{x^2+1}+1$ και $\sqrt{x+1}+1$:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \\ &= \frac{\left(x^2+1-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(x+1-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{x^2\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \\ &= \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}+1}.\end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο απευθείας:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{0(1+1)}{1+1} = 0.$$

□

Παράδειγμα 2.8. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}.$$

Εδώ, πέρα από την απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, έχουμε και ένα άλλο πρόβλημα· δεν μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε όπως κάναμε σε άλλα παραδείγματα, λόγω των απολύτων. Γι' αυτό, είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε έναν πίνακα προσήμου των παραστάσεων μέσα στα απόλυτα και να δούμε πώς συμπεριφέρεται κοντά στο 2 (βλ. πίνακα 2.6). Επομένως, αριστερά από το 2 ($x\to 2^-$), πρέπει να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2}$$

ενώ, δεξιά από το 2 ($x\to 2^+$), το όριο:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}.$$

Για το πρώτο όριο, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2} = \frac{(x-1)(x-2)}{-(x+1)(x-2)} = \frac{x-1}{-x-1},$$

οπότε:
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{-x-1}=-\frac{1}{3},$$
ενώ, για το δεύτερο όριο, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παραγοντοποιείται ως εξής:
$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x-2)}=\frac{x-3}{x+1},$$
οπότε:
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x+1}=-\frac{1}{3}.$$
Αφού έχουμε ότι:
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}=-\frac{1}{3},$$
έπεται ότι:
$$\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}=-\frac{1}{3}.$$
□

Παράδειγμα 2.9. Να υπολογισθεί το όριο:
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{|x-1|}.$$
Όπως και παραπάνω, πρέπει να βρούμε τον τύπο της $f(x)=\frac{1-x^2}{|x-1|}$ κοντά στο 1. Στην προκειμένη, έχουμε:
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-x^2}{x-1} & x>1\\ \frac{1-x^2}{1-x} & x<1\end{cases}$$
οπότε πρέπει να υπολογίσουμε τα όρια:
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^2}{x-1}$$
και
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{1-x}.$$
Για το πρώτο όριο, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παραγοντοποιείται ως εξής:
$$\frac{1-x^2}{x-1}=\frac{(1-x)(1+x)}{-(1-x)}=-1-x,$$
οπότε:
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(-1-x)=-2.$$
Για το άλλο όριο, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση παραγοντοποιείται ως εξής:
$$\frac{1-x^2}{1-x}=\frac{(1-x)(1+x)}{1-x}=1+x,$$
οπότε:
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}1+x=2,$$

επομένως, αφού τα δύο πλευρικά όρια διαφέρουν:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \neq -2 = \lim_{x\to 1^+} f(x),$$

το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^2}{|x-1|}$ δεν υπάρχει.

□

Παράδειγμα 2.10. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}^2 x}{x}.$$

Εδώ, παρατηρούμε ότι το εν λόγω όριο μοιάζει με το γνωστό όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}\, x}{x} = 0,$$

οπότε θα ήταν λογικό να προσπαθήσουμε να το εμφανίσουμε μέσα από παραγοντοποιήσεις/αλγεβρικά τεχνάσματα. Στην προκειμένη:

$$\frac{1-\text{συν}^2 x}{x} = \frac{(1-\text{συν}\, x)(1+\text{συν}\, x)}{x} = \frac{1-\text{συν}\, x}{x}(1+\text{συν}\, x),$$

και επειδή τα όρια:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}\, x}{x}, \lim_{x\to 0}(1+\text{συν}\, x)$$

υπάρχουν, από την άλγεβρα των ορίων θα υπάρχει και το όριο του γινομένου τους:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}\, x}{x}(1+\text{συν}\, x),$$

οπότε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}^2 x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}\, x}{x}(1+\text{συν}\, x) = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}\, x}{x} \cdot \lim_{x\to 0}(1+\text{συν}\, x) = 0\cdot 2 = 0,\end{aligned}$$

επομένως,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\text{συν}^2 x}{x} = 0.$$

□

Παράδειγμα 2.11. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{5^x+e^x}{2^x+3^x}.$$

Εδώ πρέπει να σκεφτούμε ως εξής: η συνάρτηση a^x έχει όριο 0 στο $-\infty$ για $a>1$, αλλά θα θέλαμε να μην έχουμε μόνο εκθετικά στον αριθμητή και στον παρονομαστή. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να παραγοντοποιήσουμε βγάζοντας ως κοινό παράγοντα τον όρο με την μικρότερη βάση, ως εξής:

$$\frac{5^x+e^x}{2^x+3^x} = \frac{e^x\left((5/e)^x+1\right)}{2^x\left(1+(3/2)^x\right)},$$

οπότε:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{5^x+e^x}{2^x+3^x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x\left((5/e)^x+1\right)}{2^x\left(1+(3/2)^x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^x \frac{(5/e)^x + 1}{1 + (3/2)^x} =$$
$$= 0\frac{0+1}{1+0} = 0.$$

□

Παράδειγμα 2.12 (Θεωρητική άσκηση)**.** Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 7} f(x),$$

αν γνωρίζετε ότι:

$$\lim_{x\to 7} \frac{f(x)+3}{x^2-12x+35} = 2019.$$

Εδώ τα πράγματα είναι περίεργα. Δεν έχουμε τον τύπο της συνάρτησης, αλλά έχουμε ένα άλλο όριο, που περιέχει τη συνάρτηση f. Παρατηρώντας τον παρονομαστή, βλέπουμε ότι $\lim\limits_{x\to 7}(x^2-12x+35) = 0$, άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουμε τρεις επιλογές:

1. το όριο του παρονομαστή $\lim\limits_{x\to 7}(f(x)+3)$ να είναι ίσο με 0,
2. το όριο του παρονομαστή $\lim\limits_{x\to 7}(f(x)+3)$ να είναι ίσο με $\lambda \neq 0$ και
3. το όριο του παρονομαστή $\lim\limits_{x\to 7}(f(x)+3)$ να είναι ίσο με $\pm\infty$.

Έπειτα, κοιτώντας τους πίνακες για τα όρια της μορφής $\frac{\lambda}{0}$, $\lambda \neq 0$ και $\frac{\pm\infty}{0}$ (περιπτώσεις 2 και 3) θα μπορούσαμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα και… ΛΑΘΟΣ! Δεν είναι μόνο αυτές οι περιπτώσεις που έχουμε! Υπάρχει πάντα η περίπτωση το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ να *μην υπάρχει*. Επομένως, πρέπει, πρώτα να δείξουμε με κάποιον τρόπο ότι το εν λόγω όριο υπάρχει και στη συνέχεια να το υπολογίσουμε.

Γι' αυτόν τον σκοπό, θέτουμε:

$$g(x) = \frac{f(x)+3}{x^2-12x+35}$$

για την οποία συνάρτηση, από τα δεδομένα μας ξέρουμε ότι:

$$\lim_{x\to 7} g(x) = 2019.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, για $x \neq 7$ και x κοντά στο[26] 7 ισχύει ότι:

$$g(x) = \frac{f(x)+3}{x^2-12x+35} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) = g(x)(x^2-12x+35) - 3.$$

Αφού τα όρια $\lim\limits_{x\to 7} g(x)$ και $\lim_{x\to 7}(x^2-12x+35)$ υπάρχουν έπεται, από την άλγεβρα των ορίων, ότι και το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ υπάρχει και, μάλιστα:

$$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7}(g(x)(x^2-12x+35)-3) = 2019 \cdot 0 - 3 = -3,$$

δηλαδή:

$$\lim_{x\to 7} f(x) = -3.$$

□

[26] Άλλωστε, αυτές οι τιμές της x μας απασχολούν για να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$

2.3.4 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\infty - \infty$

Είδαμε ότι υπήρξε μία δυσκολία κατά τον υπολογισμό του ορίου της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x$ στο $+\infty$, καθώς καταλήγαμε σε μια μορφή $\infty - \infty$. Αν δοκιμάσουμε κι εδώ να παραγοντοποιήσουμε[27] ίσως κάτι να καταφέρουμε:

$$x^2 - x = x(x-1).$$

Τώρα μάλιστα! Εδώ τα πράγματα είναι πολύ πιο απλά, αφού έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$$

και, αφού τα όρια υπάρχουν, από την άλγεβρα των ορίων:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to+\infty} x(x-1) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$$

Αν όμως είχαμε το ακόλουθο όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x + 1),$$

όπου η συνάρτηση δεν παραγοντοποιείται;

Εδώ χρειάζονται άλλα μέσα. Γενικά, ένα πολύ χρήσιμο όριο είναι το:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^a} = 0,$$

για κάθε $a > 0$. Έτσι, ενώ δεν μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε κατά «φυσιολογικό» τρόπο, μπορούμε να κάνουμε το εξής:

$$x^2 - x + 1 = x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right),$$

οπότε και έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty,$$

διότι:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^a} = 0.$$

Ας περάσουμε τώρα σε μερικά πιο δύσκολα παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.13. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{2018}} - \frac{1}{x^{2020}}\right).$$

Εδώ μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2 018} - \frac{1}{x^{2020}} = \frac{x^2-1}{x^{2020}} = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^{2020}} = \\ = \frac{1}{x^{2018}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right),\end{aligned}$$

[27] Γενικά, η παραγοντοποίηση είναι από τις πρώτες μας σκέψεις όταν θέλουμε να προσπεράσουμε μία απροσδιόριστη μορφή — παρέα με τη συζυγή παράσταση.

οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{2018}}-\frac{1}{x^{2020}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2018}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty,$$

διότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2018}}=+\infty \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty.$$

□

Παράδειγμα 2.14. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^5}\right).$$

Παρόμοια με το προηγούμενο, παραγοντοποιούμε ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^5}&=\frac{(x-1)^4-2}{(x-1)^5}=\\&=\frac{(x-1)^4\left(1-\frac{2}{(x-1)^4}\right)}{(x-1)^5}=\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{2}{(x-1)^4}\right),\end{aligned}$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^5}\right)&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{2}{(x-1)^4}\right)=\\&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\left(1-\frac{2}{(x-1)^4}\right).\end{aligned}$$

Εδώ έχουμε ένα θέμα με το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$, καθώς:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty,$$

ενώ

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty,$$

επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^5}\right)=+\infty,$$

και

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^5}\right)=-\infty,$$

άρα το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

□

Παράδειγμα 2.15. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right).$$

Εδώ τα πράγματα είναι πιο σκούρα, μιας και δεν έχουμε κάποιον άμεσο τρόπο να παραγοντοποιήσουμε. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε τη συζυγή παράσταση $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}$ και να πάρουμε το εξής:

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}}=$$

$$\begin{aligned}&= \frac{x^2+1-(2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}} = \\ &= \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}}.\end{aligned}$$

Κι εδώ όμως δεν έχουμε και πολλά να πούμε μιας και έχουμε μια απροσδιοριστία της μορφής $\frac{-\infty}{+\infty}$. Οπότε μπορούμε να συνεχίσουμε, προσπαθώντας να απλποιήσουμε λίγο τις παραστάσεις εντός των ριζικών:

$$\begin{aligned}\frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+1}} &= \frac{-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}} = \\ &= \frac{-x^2}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \\ &= \frac{-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \\ &= \frac{-x^2}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)} = \\ &= \frac{-x^2}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)} = \\ &= \frac{-x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}.\end{aligned}$$

Κάτσε, ώπα! Γιατί διώξαμε το απόλυτο; Αφού δεν ισχύει $|x| = x$, γενικά! Πράγματι, εν γένει $x \leq |x|$, αλλά, στην προκειμένη περίπτωση, όλες αυτές οι πράξεις και οι τούμπες και οι μετασχηματισμοί γίνονται για να υπολογίσουμε το όριο καθώς $x \to +\infty$. Και τι σημαίνει $x \to +\infty$; Σημαίνει ότι, τελικά, η x θα παίρνει τιμές μεγαλύτερες από το 0, άρα τελικά $x > 0$, δηλαδή $|x| = x$. Σε αυτήν την τελευταία μορφή είναι εύκολο να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}\right)} = -\infty,$$

διότι:

$$\lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \text{ και } \lim_{x\to 0}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{2}.$$

□

Παράδειγμα 2.16. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+x\right).$$

Εδώ μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής, κατ' αναλογία με το προηγούμενο:

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2-3x+2}+x &= \sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+x = \\ &= \sqrt{x^2}\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |x|\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x= \\
&= x\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x= \\
&= x\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right),
\end{aligned}$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)=+\infty.$$

□

Παράδειγμα 2.17. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-2x\right).$$

Εδώ το προηγούμενο τέχνασμα δε δουλεύει (δοκιμάστε το για να πειστείτε) αν και η μόνη διαφορά είναι ένας αριθμός. Θα χρειαστεί, πρώτα, να πολλαπλασιάσουμε με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{4x^2-3x+2}+2x$, οπότε και θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2-3x+2}-2x &= \frac{\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x}= \\
&= \frac{4x^2-3x+2-4x^2}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x}=\frac{-3x+2}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x}.
\end{aligned}$$

Από εδώ συνεχίζουμε με το συνηθισμένο, πια, τέχνασμα:

$$\begin{aligned}
\frac{-3x+2}{\sqrt{4x^2-3x+2}+2x} &= \frac{-3x+2}{\sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x}= \\
&= \frac{-3x+2}{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x}= \\
&= \frac{-3x+2}{|x|\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x}= \\
&= \frac{x\left(-3+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2x}= \\
&= \frac{x\left(-3+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2\right)}= \\
&= \frac{-3+\frac{2}{x}}{\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2},
\end{aligned}$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}-2x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{2}{x}}{\sqrt{\left(4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+2}= \\
&= \frac{-3+0}{\sqrt{4-0+0}+2}=-\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2.18. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+4x}-3x^2.$$

Ας προχωρήσουμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τη συζυγή παράσταση $\sqrt{9x^2+4x}+3x^2$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{9x^2+4x}-3x^2 &= \frac{\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x^2\right)\left(\sqrt{9x^2+4x}+3x^2\right)}{\sqrt{9x^2+4x}+3x^2} = \\
&= \frac{9x^2+4x-9x^4}{\sqrt{9x^2+4x}+3x^2} = \\
&= \frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x^2} = \\
&= \frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x^2} = \\
&= \frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{|x|\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x^2} = \\
&= \frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{x\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x^2} = \\
&= \frac{x^4\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{x\left(\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x\right)} = \\
&= \frac{x^3\left(-9+\frac{9}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\sqrt{\left(9+\frac{4}{x}\right)}+3x},
\end{aligned}$$

και τώρα κάναμε μια τρύπα στο νερό, γιατί φτάσαμε σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Επομένως, πρέπει να ακολουθήσουμε άλλο μονοπάτι.

Ας δοκιμάσουμε να κάνουμε κατευθείαν παραγοντοποίηση, χωρίς να αξιοποιήσουμε τη συζυγή παράσταση:

$$\begin{aligned}
\sqrt{9x^2+4x}-3x^2 &= \sqrt{x^2\left(9+\frac{4}{x}\right)}-3x^2 = \\
&= \sqrt{x^2}\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x^2 = \\
&= |x|\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x^2 = \\
&= x\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x^2 = \\
&= x\left(\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x\right),
\end{aligned}$$

και εδώ τα πράγματα είναι πιο εύκολα, μιας και έχουμε απλώς ένα γινόμενο απείρων, επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+4x}-3x^2 = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{9+\frac{4}{x}}-3x\right) = -\infty,$$

□

2.3.5 Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα ότι, σε αρκετές περιπτώσεις, προκύπτει μια απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ η οποία είναι, εν γένει δύκολη στη διαχείριση χωρίς πιο «ανεπτυγμένα» εργαλεία[28]. Παρ' όλα αυτά, μπορούμε σε κάποιες περιπτώσεις να άρουμε την απροσδιοριστία και να έρθουμε σε μία μορφή που θα είναι διαχειρίσιμη.

Ακολουθούν κάποια σχετικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.19. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-3}{-3x^3+7x-5}.$$

Θα βγάλουμε κοινό παράγοντα σε αριθμητή και παρονομαστή τον μεγιστοβάθμιο όρο έτσι ώστε να εμφανίσουμε γνωστά μας όρια:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+4x-3}{-3x^3+7x-5} &= \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(-3+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)} = \\ &= \frac{1}{x^3}\frac{1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}{-3+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^3}}.\end{aligned}$$

Οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-3}{-3x^3+7x-5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}\frac{1+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}{-3+\frac{7}{x^2}-\frac{5}{x^3}} = 0\cdot\frac{1+0-0}{-3+0-0} = 0.$$

□

Παράδειγμα 2.20. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{4x}.$$

Εδώ μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε τη δοσμένη συνάρτηση ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{4x} &= \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}-x}{4x} = \\ &= \frac{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}-x}}{4x} = \\ &= \frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}-x}}{4x} = \\ &= \frac{-x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+1}\right)}{4x} = \\ &= -\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+1}\right),\end{aligned}$$

οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}-x}{4x} = \lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+1}\right) = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0}+1\right) = -\frac{1}{2}.$$

□

[28] Θα μάθουμε σε επόμενο κεφάλαιο κάποια από αυτά τα εργαλεία.

Παράδειγμα 2.21. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^x}{4^x+7^x}.$$

Εδώ θα ακολουθήσουμε το σκεπτικό των προηγούμενων παραδειγμάτων, αλλά, μιας και δεν έχουμε να κάνουμε με πολυώνυμα, πρέπει να σκεφτούμε λίγο διαφορετικά. Αν βγάλουμε κοινό παράγοντα το 2^x από τον αριθμητή (τον όρο με την μικρότερη βάση), τότε θα δημιουργηθεί ένας όρος της μορφής $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ οποίος τείνει στο $+\infty$ καθώς $x\to+\infty$, επομένως δε μας συμφέρει[29]. Επομένως, ίσως εξυπηρετεί να βγάλουμε κοινούς παράγοντες σε αριθμητή και παρονομαστή τους μεγιστοβάθμιους όρους:

$$\frac{2^x+3^x}{4^x+7^x}=\frac{3^x\left((2/3)^x+1\right)}{7^x\left((4/7)^x+1\right)},$$

οπότε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^x}{4^x+7^x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left((2/3)^x+1\right)}{7^x\left((4/7)^x+1\right)}=\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^x\frac{(2/3)^x+1}{(4/7)^x+1}=\\&=0\cdot\frac{0+1}{0+1}=0.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2.22. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(1/2)^x}{(1/3)^x+(1/\pi)^x}.$$

Εδώ, αναλόγως με το προηγούμενο, θα βγάλουμε κοινό παράγοντα από τον παρονομαστή τον όρο με την μικρότερη βάση[30]:

$$\frac{(1/2)^x}{(1/3)^x+(1/\pi)^x}=\frac{(1/2)^x}{(1/\pi)^x\left((\pi/3)^x+1\right)},$$

οπότε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{(1/2)^x}{(1/3)^x+(1/\pi)^x}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1/2)^x}{(1/\pi)^x\left((\pi/3)^x+1\right)}=\\&=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^x\frac{1}{(\pi/3)^x+1}=0\cdot\frac{1}{0+1}=0.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2.23. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x+1}+3^{x+2}}{4^x-2^{x-1}}.$$

Εδώ χρειάζεται λίγη προσοχή με τις βάσεις των δυνάμεων και τις ιδιότητες των εκθετών:

$$\begin{aligned}\frac{2^{2x+1}+3^{x+2}}{4^x-2^{x-1}}&=\frac{2\cdot 2^{2x}+3^2\cdot 3^x}{4^x-2^{-1}2^x}=\\&=\frac{2\cdot 4^x+9\cdot 3^x}{4^x-\frac{1}{2}2^x}=\end{aligned}$$

[29] Όλη η δουλειά γίνεται για να ξεφορτωθούμε τα $+\infty$ από το κλάσμα.

[30] Αφού το $x\to-\infty$.

$$= \frac{4^x\left(2+9(3/4)^x\right)}{4^x\left(1-\frac{1}{2}(1/2)^x\right)} =$$
$$= \frac{2+9(3/4)^x}{1-\frac{1}{2}(1/2)^x},$$

επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x+1}+3^{x+2}}{4^x-2^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+9(3/4)^x}{1-\frac{1}{2}(1/2)^x} =$$
$$= \frac{2+9\cdot 0}{1-\frac{1}{2}\cdot 0} = 2.$$

□

Όρια της (απροσδιόριστης) μορφής $0\cdot(\pm\infty)$

Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to1^-}(x-1)\,\text{εφ}\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

αξιοποιώντας τις συνήθεις ιδιότητες των ορίων θα βρεθούμε στην ακόλουθη κατάσταση:

$$\lim_{x\to1^-}(x-1)\,\text{εφ}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{x\to1^-}(x-1)\cdot\lim_{x\to1}\text{εφ}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0\cdot(+\infty),$$

και αυτή, όπως έχουμε δει είναι άλλη μία απροσδιόριστη μορφή. Εδώ όμως δεν μπορούμε ούτε να παραγοντοποιήσουμε ούτε έχουμε κάποια «συζυγή παράσταση» για να μας ξελασπώσει. Η αλήθεια είναι ότι με αυτήν την απροσδιοριστία θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στην πορεία, μιας και δεν έχουμε ακόμα τα απαραίτητα εργαλεία, επομένως δεν μπορούμε, προς το παρόν, να υπολογίσουμε το παραπάνω όριο[31]. Ας δούμε, ενδεικτικά, ένα παράδειγμα στο οποίο θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο το θεώρημα ορίου σύνθετης συνάρτησης.

Παράδειγμα 2.24. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\text{ημ}\,\frac{1}{x}.$$

Εδώ θα χρειαστούμε, όπως είπαμε, το θεώρημα για το όριο σύνθετης συνάρτησης. Ποιες συναρτήσεις έχουμε στα χέρια μας, όμως; Ας δούμε λίγο ένα τέχνασμα που θα χρησιμοποιήσουμε πολύ συχνά, ειδικά όταν έρχεται στο προσκήνιο κάποια απροσδιοριστία σαν και αυτή:

$$x\,\text{ημ}\,\frac{1}{x} = \frac{\text{ημ}\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Ε, και; Τώρα μπορούμε να παίξουμε με τις εξής δύο συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\text{ημ}\,x}{x}$$

---

[31] Βασικά, μπορούμε να το υπολογίσουμε και με τα έως τώρα εργαλεία μας, απλά είναι λίγο πιο κοπιαστικό. Θέτοντας $u=x-1$ αναγόμαστε στο όριο $\lim\limits_{u\to0^-} u\,\text{εφ}\left(\frac{\pi u}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$, το οποίο, μέσω της σχέσης $\text{εφ}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\,\text{σφ}\,x$ γράφεται $-\lim_{u\to0^-} u\,\text{σφ}\,\frac{\pi u}{2}$. Τώρα, έχουμε:

$$\lim_{u\to0^-} u\,\text{σφ}\,\frac{\pi u}{2} = \lim_{u\to0^-}\frac{u}{\text{ημ}\,\frac{\pi}{u}2}\,\text{συν}\,\frac{\pi u}{2} = \frac{2}{\pi}\cdot1 = \frac{2}{\pi},$$

άρα το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $-\frac{2}{\pi}$.

$$g(x) = \frac{1}{x},$$

μιας και:

$$x\,\text{ημ}\,\frac{1}{x} = \frac{\text{ημ}\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

Ας υπολογίσουμε πρώτα το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

οπότε τώρα πρέπει να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{y\to 0} f(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\text{ημ}\,y}{y} = 1,$$

επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\text{ημ}\,\frac{1}{x}.$$

□

Όρια με αλλαγή μεταβλητής

Με αφορμή την προηγούμενη διαπίστωσή μας ότι «εξαντλήσαμε» σε έναν βαθμό τις δυνατότητες της έως τώρα θεωρίας μας[32], θα χρειαστούμε μία ακόμα, γενικής χρήσης, τεχνική που θα μας «λύσει τα χέρια». Αυτή είναι η αλλαγή μεταβλητής.

Όπως και στις εξισώσεις, πολλές φορές, αλλάζαμε μεταβλητή (θέταμε) για να φέρουμε την εξίσωση σε μία πιο γνώριμη και απλή για εμάς μορφή, έτσι και εδώ, σε κάποιες περιπτώσεις, μπορούμε να αλλάξουμε λίγο τη μορφή του ορίου έτσι ώστε να το φέρουμε στα «μέτρα» μας.

Στα όρια[33], η αλλαγή μεταβλητής βασίζεται ουσιαστικά στο θεώρημα ορίου σύνθετης συνάρτησης με τον εξής τρόπο. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την προηγούμενη περίπτωση:

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\text{ημ}\,\frac{1}{x}.$$

Μπορούμε να αλλάξουμε μεταβλητή και να θέσουμε[34]:

$$y = \frac{1}{x},$$

οπότε το όριό μας γίνεται:

$$\lim_{y\to\text{πού;}} \frac{1}{y}\,\text{ημ}\,y.$$

Όπως θα παρατηρήσατε, λείπει κάτι από το παραπάνω όριο· πού τείνει το y; Εδώ, πρακτικά, ακολουθούμε το θεώρημα ορίου σύνθετης συνάρτησης και, για να βρούμε που τείνει το y, αρκεί να ανατρέξουμε στον ορισμό του y και στο πού τείνει το x. Είναι εύκολο να δούμε ότι:

$$y = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0,$$

[32] Που δεν τις εξαντλήσαμε, για να λέμε και του στραβού το δίκιο, αλλά θα έπρεπε να μπούμε σε χωράφια που δεν εμπίπτουν στην ύλη μας για να την εξαντλήσουμε.

[33] Όπως και στις εξισώσεις, απλά εκεί δεν είχαμε τα απαραίτητα εργαλεία

[34] Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι, στην πραγματικότητα, η μεταβλητή y δεν είναι ανεξάρτητη, καθώς όλες της οι τιμές εξαρτώνται από τις τιμές της x, δηλαδή η y είναι μία *συνάρτηση* της x και, μάλιστα, είναι ακριβώς η συνάρτηση g — με τον συμβολισμό του προηγούμενου παραδείγματος.

επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\text{ημ}\,\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{\text{ημ}\,y}{y} = 1.$$

Πολλές φορές, για λόγους ευκολίας και όταν η αλλαγή μεταβλητής είναι απλή, όπως στην περίπτωσή μας, μπορούμε[35] αντί όλου αυτού, να γράφουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\text{ημ}\,\frac{1}{x} \overset{y=\frac{1}{x}}{\underset{y\to 0}{=\!=\!=}} \lim_{y\to 0}\frac{\text{ημ}\,y}{y} = 1.$$

Παρατήρηση 2.6. Ουσιαστικά, η αλλαγή μεταβλητής είναι ένας πιο πρακτικός τρόπος να εφαρμόζουμε το θεώρημα ορίου σύνθετης συνάρτησης και, συνήθως, προτιμούμε αυτόν τον τρόπο αντί του να εφαρμόζουμε ευθέως το θεώρημα. Παρ' όλα αυτά, ο καθένας μπορεί να χρησιμοποιεί αυτό που του φαίνεται πιο οικείο.

□

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στη μελέτη των υπολοίπων απροσδιοριστιών με μία σχετική άνεση.

Όρια των (απροσδιόριστων) μορφών $(\pm\infty)^0$, $0^{\pm\infty}$, 0^0 και $(\pm\infty)^{\pm\infty}$

Θε εξετάσουμε όλες τις παραπάνω μορφές μαζί διότι, ο συνήθης τρόπος για να τις αντιμετωπίσουμε, είναι να εκμεταλευτούμε τις ταυτότητες[36]:

$$\ln e^x = x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$
$$e^{\ln x} = x \text{ για κάθε } x>0.$$

Προχωράμε απευθείας σε κάποια παραδείγματα, αν και με αυτές τις απροσδιοριστίες θα ασχοληθούμε εκτενέστερα σε επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 2.25. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} x^x.$$

Ξαναγράφουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x},$$

και θέτουμε $y = x\ln x$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln x = (+\infty)(+\infty) = +\infty,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x} = \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty,$$

άρα:

$$\lim_{x\to+\infty} x^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x} = +\infty.$$

□

[35] Και, να είστε σίγουροι, θα το κάνουμε!
[36] Κυρίως τη δεύτερη για να μπορούμε να «πετάξουμε» τον εκθέτη έξω από τον λογάριθμο.

Παράδειγμα 2.26. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x.$$

Κι εδώ, ξαναγράφουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x\ln\frac{1}{x}},$$

και θέτουμε $y = x\ln\frac{1}{x}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}(-x\ln x) = -\infty,$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

□

Υπολογισμός ορίων με τη χρήση του κριτηρίου παρεμβολής

Εκτός από τις απροσδιόριστες μορφές, υπάρχουν και πολλές περιπτώσεις στις οποίες καλούμαστε να υπολογίσουμε όρια σαν το ακόλουθο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\, x}{x}.$$

Εδώ, το όριο του αριθμητή δεν υπάρχει, επομένως δεν είμαστε σε καμμία από τις γνώριμες απροσδιόριστες μορφές. Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο ακολουθώντας την εξής πορεία:

- Χρησιμοποιώντας την ανισότητα:

  $$-1 \le \eta\mu\, x \le 1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

  έχουμε[37]:

  $$-\frac{1}{x} \le \frac{\eta\mu\, x}{x} \le \frac{1}{x}.$$

  Εδώ παρατηρούμε ότι:

  $$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x},$$

  επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής, το εν λόγω όριο υπάρχει και, μάλιστα:

  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\, x}{x} = 0.$$

Προχωράμε, τώρα, σε κάποια ακόμα παραδείγματα αξιοποίησης του κριτηρίου παρεμβολής.
Παράδειγμα 2.27. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to0} x^2\,\eta\mu\,\frac{1}{x}.$$

[37] Αφού $x\to+\infty$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x>0$.

Κι εδώ, αφού το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\text{ημ}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει, θα χρειαστεί να φράξουμε τη συνάρτηση $x^2\,\text{ημ}\frac{1}{x}$ από δύο άλλες συναρτήσεις. Χρησιμοποιώντας, και πάλι, την ανισότητα:

$$-1\leq \text{ημ}\,x\leq 1,$$

έχουμε:

$$-x^2\leq x^2\,\text{ημ}\frac{1}{x}\leq x^2$$

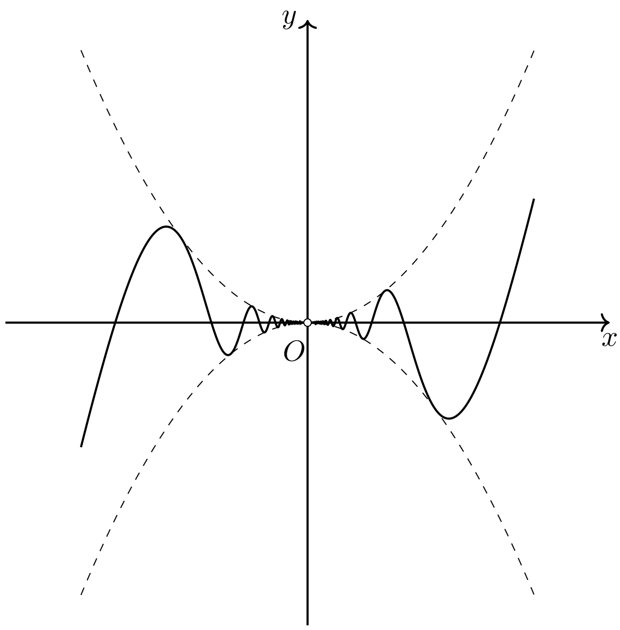
και:

$$\lim_{x\to 0}(-x^2)=0=\lim_{x\to 0}x^2,$$

επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής, το ζητούμενο όριο υπάρχει και, μάλιστα:

$$\lim_{x\to 0}x^2\,\text{ημ}\frac{1}{x}=0.$$

Μπορούμε να δούμε και τη γραφική παράσταση της εν λόγω συνάρτησης, η οποία έχει ένα αισθητικό ενδιαφέρον, στο σχήμα 2.14.



Σχήμα 2.14: Η συνάρτηση $x^2\,\text{ημ}\frac{1}{x}$

□

Παράδειγμα 2.28. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\text{ημ}^2 x+\text{ημ}\,x+\text{ημ}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{x}.$$

Χρησιμοποιούμε κι εδώ την ανισότητα:

$$-1\leq \text{ημ}\,x\leq 1,$$

οπότε[38]:

$$-3\leq \text{ημ}^2 x+\text{ημ}\,x+\text{ημ}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leq 3\Leftrightarrow$$

[38] Αφού $x\to-\infty$, υποθέτουμε ότι $x<0$.

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{x} \geq \frac{\eta\mu^2 x + \eta\mu\, x + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{x} \geq \frac{3}{x},$$

και, αφού:

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{3}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x},$$

από το κριτήριο παρεμβολής, το ζητούμενο όριο υπάρχει και, μάλιστα:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu^2 x + \eta\mu\, x + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{x} = 0.$$

□

Παράδειγμα 2.29. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu(x^2)}{x}.$$

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μία άλλη ανισότητα, την:

$$|\eta\mu\, x| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq \eta\mu\, x \leq |x|,$$

οπότε, έχουμε:

$$-\left|x^2\right| \leq \eta\mu(x^2 - x) \leq \left|x^2\right|$$

Εδώ πρέπει να είμαστε προσεκτικοί, όμως, διότι, αφού $x \to 0$, σημαίνει ότι η μεταβλητή x παίρνει τιμές *εκατέρωθεν*[39] του 0, άρα μπορεί να είναι και θετική και αρνητικά. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην μπορούμε να διαιρέσουμε την παραπάνω σχέση με x, καθώς δε γνωρίζουμε το πρόσημο της x. Γι' αυτό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις και χρησιμοποιούμε τα πλευρικά όρια:

1. αν $x \to 0^+$, τότε $x > 0$, επομένως:

$$-\left|x^2\right| \leq \eta\mu(x^2) \leq \left|x^2\right| \Leftrightarrow \frac{-x^2}{x} \leq \frac{\eta\mu(x^2)}{x} \leq \frac{x^2}{x},$$

δηλαδή:

$$-x \leq \frac{\eta\mu(x^2)}{x} \leq x,$$

και, επειδή:

$$\lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} x,$$

από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu(x^2 - x)}{x} = 0.$$

2. αν $x \to 0^-$, τότε $x < 0$, επομένως:

$$-\left|x^2\right| \leq \eta\mu(x^2) \leq \left|x^2\right| \Leftrightarrow \frac{-x^2}{x} \geq \frac{\eta\mu(x^2)}{x} \geq \frac{x^2}{x},$$

δηλαδή:

$$-x \geq \frac{\eta\mu(x^2)}{x} \geq x,$$

και, επειδή:

$$\lim_{x\to 0^-} (-x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} x,$$

από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\eta\mu(x^2)}{x} = 0.$$

[39] Εκατέρωθεν σημαίνει «και από τις δύο μεριές».

Τέλος, αφού τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα έπεται ότι το ζητούμενο όριο υπάρχει και μάλιστα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^2)}{x}=0.$$

$\square$

Παρατήρηση 2.7. Για το παραπάνω όριο, θα μπορούσαμε να είχαμε εργαστεί και ως εξής[40]:

- αφού $x\to 0$, έπεται ότι $x\neq 0$, άρα και $x^2\neq 0$, επομένως μπορούμε να διαιρέσουμε με x^2. Διαιρούμε και πολλαπλασιάζουμε, λοιπόν, τη δοσμένη συνάρτηση με x^2:

$$\frac{\eta\mu(x^2)}{x}=\frac{\eta\mu(x^2)x^2}{x^2\cdot x}=\frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x}=\frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}x.$$

- Θα υπολογίσουμε δύο όρια και θα βρούμε το ζητούμενο όριο σαν γινόμενο ορίων. Πρώτα, θα υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}\;\underset{y\to 0}{\overset{y=x^2}{=\!=}}\;\lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu\, y}{y}=1,$$

  και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}x=0,$$

  οπότε το ζητούμενο όριο υπάρχει (γινόμενο ορίων) και, μάλιστα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x^2)}{x^2}x=1\cdot 0=0.$$

$\square$

2.3.6 Όρια που μας φέρνουν... εκτός ορίων

Θα δούμε τώρα μερικά όρια τα οποία χρησιμοποιούν περισσότερες από μία από τις τεχνικές που είδαμε παραπάνω και, αρκετά συχνά, εμφανίζονται και πάνω από μία απροσδιόριστες μορφές.

Παράδειγμα 2.30. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{4x+5}.$$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{4x+5}=\\
&=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=\\
&=\frac{x^2+1-(x^2+x+1)}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=\\
&=\frac{-x}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=
\end{aligned}$$

[40] Γενικά, προχωρώντας θα δείτε ότι πολλά όρια είναι δυνατό να υπολογιστούν με αρκετούς διαφορετικούς τρόπους.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-x}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2\left(1+1/x^2\right)}+\sqrt{x^2\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)} = \\
&= \frac{-x}{(4x+5)\left(\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+1/x^2\right)}+\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)} = \\
&= \frac{-x}{(4x+5)\left(|x|\sqrt{\left(1+1/x^2\right)}+|x|\sqrt{\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)} = \\
&= \frac{-x}{x\left(4+5/x\right)\left(x\sqrt{\left(1+1/x^2\right)}+x\sqrt{\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)} = \\
&= \frac{-x}{x^2\left(4+5/x\right)\left(\sqrt{\left(1+1/x^2\right)}+\sqrt{\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)} = \\
&= \frac{-1}{x\left(4+5/x\right)\left(\sqrt{\left(1+1/x^2\right)}+\sqrt{\left(1+1/x+1/x^2\right)}\right)}.
\end{aligned}
$$

Τώρα, μπορούμε, επιτέλους, να πάρουμε όριο καθώς $x \to +\infty$, οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{4x+5} = 0.$$

□

Παράδειγμα 2.31. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2+4}{x^3-4x^2+3x+2}}.$$

Θέτουμε πρώτα:

$$y = \frac{x^2+4}{x^3-4x+3x+2},$$

και υπολογίζουμε το όριο:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4}{x^3-4x^2+3x+2} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+4/x^2\right)}{x^3\left(1-4/x+3/x^2+2/x^3\right)} = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\frac{1+4/x^2}{1-4/x+3/x^2+2/x^3} = \\
&= 0 \cdot \frac{1+0}{1-0+0+0} = 0.
\end{aligned}
$$

Άρα:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2+4}{x^3-4x^2+3x+2}} = \lim_{y\to 0} e^y = e^0 = 1.$$

□

Παράδειγμα 2.32. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{συν}\left(x^3-x^2\right)-1}{x}.$$

Εδώ εφαρμόζουμε το εξής τέχνασμα: πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την παράσταση x^3-x^2, η οποία είναι μη μηδενική — αφού $x \to 0$ — οπότε:

$$\frac{\text{συν}\left(x^3-x^2\right)-1}{x} = \frac{\left(\text{συν}\left(x^3-x^2\right)-1\right)\left(x^3-x^2\right)}{x\left(x^3-x^2\right)} =$$

$$= \frac{\text{συν}\left(x^3 - x^2\right) - 1}{x^3 - x^2} \cdot \frac{x^3 - x^2}{x}.$$

Τώρα, αρκεί να υπολογίσουμε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{συν}\left(x^3 - x^2\right) - 1}{x^3 - x^2} \text{ και } \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2}{x}.$$

Για το πρώτο όριο θέτουμε $y = x^3 - x^2$, οπότε $y \to 0$ και:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{συν}\left(x^3 - x^2\right) - 1}{x^3 - x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\text{συν}\, y - 1}{y} = 0.$$

Για το δεύτερο όριο, παραγοντοποιούμε ως εξής:

$$\frac{x^3 - x^2}{x} = \frac{x^2(x-1)}{x} = x(x-1),$$

οπότε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x(x-1) = 0,$$

άρα, το ζητούμενο όριο υπάρχει (γινόμενο ορίων) και είναι ίσο με:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{συν}\left(x^3 - x^2\right) - 1}{x} = 0 \cdot 0 = 0.$$

□

Παράδειγμα 2.33. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{e^{-x} - 1}{1 - e^x}.$$

Εδώ έχουμε μία απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ που εμφανίζεται μέσα στον λογάριθμο. Επομένως, ίσως εξυπηρετεί να θέσουμε:

$$y = \frac{e^{-x} - 1}{1 - e^x}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, πρέπει να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{1 - e^x},$$

το οποίο δε θυμίζει κάποιο όριο που έχουμε δει. Μετά από λίγη σκέψη, παρατηρούμε ότι, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με e^x, παίρνουμε:

$$\frac{e^{-x} - 1}{1 - e^x} = \frac{e^x\left(e^{-x} - 1\right)}{e^x\left(1 - e^x\right)} = \frac{1}{e^x} \frac{1 - e^x}{1 - e^x} = e^{-x}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{1 - e^x} = \lim_{x\to 0} e^{-x} = e^0 = 1.$$

Άρα, το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{e^{-x} - 1}{1 - e^x} = \lim_{y\to 1} \ln y = 0.$$

□

Παράδειγμα 2.34. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \,\text{ημ}\left(e^{1-x}\right).$$

Εδώ έχουμε μία απροσδιοριστία της μορφής $0\cdot(\pm\infty)$ και δε φαίνεται ευκολη λύση στον ορίζοντα. Θέτουμε, αρχικά:

$$y = e^{1-x},$$

οπότε:

$$\ln y = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - \ln y.$$

Τώρα, αφού:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0,$$

το δοσμένο όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \,\text{ημ}\left(e^{1-x}\right) = \lim_{y\to 0} e^{1-\ln y}\,\text{ημ}\, y,$$

το οποίο δε φαίνεται και πολύ καλύτερο. Αν, όμως κάνουμε λίγες πράξεις, βλέπουμε ότι:

$$e^{1-\ln y}\,\text{ημ}\, y = e\cdot e^{-\ln y}\,\text{ημ}\, y = e\cdot e^{\ln(1/y)}\,\text{ημ}\, y = e\frac{1}{y}\,\text{ημ}\, y,$$

δηλαδή, έχουμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{y\to 0} e\frac{\text{ημ}\, y}{y} = e\lim_{y\to 0}\frac{\text{ημ}\, y}{y} = e\cdot 1 = e.$$

□

Παράδειγμα 2.35. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \text{συν}\left(\frac{\text{ημ}\, x\,\text{συν}\, x}{x^2-2x}\right).$$

Πολλά μαζεύτηκαν και θα μπερδευτούμε. Θέτουμε:

$$y = \frac{\text{ημ}\, x\,\text{συν}\, x}{x^2-2x}$$

και πρέπει να υπολογίσουμε στη συνέχει το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{ημ}\, x\,\text{συν}\, x}{x^2-2x}.$$

Ας κάνουμε πρώτα λίγες πράξεις:

$$\begin{aligned}\frac{\text{ημ}\, x\,\text{συν}\, x}{x^2-2x} &= \frac{\text{ημ}\, x\,\text{συν}\, x}{x(x-2)} = \\ &= \frac{\text{ημ}\, x}{x}\cdot\frac{\text{συν}\, x}{x-2}.\end{aligned}$$

Έχουμε δει σε προηγούμενο παράδειγμα ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{ημ}\, x}{x} = 0,$$

επομένως, αρκεί να υπολογίσουμε (αν υπάρχει) το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{συν}\, x}{x-2}.$$

Θα αξιοποιήσουμε τώρα το κριτήριο παρεμβολής, μέσω της ανισότητας[41]:

$$-1 \leq \text{συν}\, x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x-2} \leq \frac{\text{συν}\, x}{x-2} \leq \frac{1}{x-2}.$$

Αφού:

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x-2} = 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2},$$

από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{συν}\, x}{x-2} = 0,$$

επομένως:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{ημ}\, x\, \text{συν}\, x}{x^2 - 2x} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Έτσι, το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x \to +\infty} \text{συν} \left(\frac{\text{ημ}\, x\, \text{συν}\, x}{x^2 - 2x} \right) = \lim_{y \to 0} \text{συν}\, y = \text{συν}\, 0 = 1.$$

□

Παράδειγμα 2.36. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln(2 + e^x) - 3x \right).$$

Εδώ εκμεταλλευόμαστε την ταυτότητα:

$$x = \ln e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

ως εξής:

$$\ln(2 + e^x) - 3x = \ln(2 + e^x) - \ln e^{3x} = \ln \frac{1 + e^x}{e^{3x}}.$$

Τώρα, θέτουμε:

$$y = \frac{1 + e^x}{e^{3x}},$$

και έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + e^x}{e^{3x}} &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + \frac{e^x}{e^{3x}} \right) = \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x} + \frac{1}{e^{2x}} \right) = \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x} + e^{-2x} \right) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

οπότε:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln(2 + e^x) - 3x \right) = \lim_{y \to 0} \ln y = -\infty.$$

□

[41] Αφού $x \to +\infty$, υποθέτουμε ότι $x > 0$.

Παράδειγμα 2.37. Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}.$$

Να σου πω τη μοίρα σου, να σου πω το ριζικό σου. Εδώ έχουμε πολλά ριζικά μέσα στην παράσταση. Ένα τέχνασμα εδώ, για να φανούν τα πράγματα πιο ξεκάθαρα είναι να θέσουμε:

$$y=\sqrt[12]{x}.$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι το 12 δε μας ήρθε στην τύχη, αλλά είναι το Ε.Κ.Π. των τάξεων των ριζών που εμφανίζονται στην παράσταση (του 3, του 4 και του 2). Προφανώς, $y\to 0$, επομένως:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=\lim_{y\to 0}\frac{y^4+y^6}{y^3}.$$

Αυτό το όριο, όμως, είναι πια εύκολο να υπολογιστεί, αφού:

$$\frac{y^4+y^6}{y^3}=\frac{y^4(1+y^2)}{y^3}=y(1+y^2),$$

οπότε:

$$\lim_{y\to 0}\frac{y^4+y^6}{y^3}=\lim_{y\to 0}y(1+y^2)=0,$$

άρα και

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}=0.$$

□

Παράδειγμα 2.38 (Θεωρητική). Αν $f:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση:

$$xf(x)\left(f(x)-2\,\text{συν}\,\frac{1}{x}\right)\leq|\text{ημ}\,x|+x\left(\text{ημ}^2\,\frac{1}{x}-1\right),\ \text{για κάθε } x\neq 0,$$

να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

Τώρα, μάλιστα... Αυτό μας έλειπε. Επειδή μας δίνεται μια ανισότητα, υποθέτουμε ότι θα χρησιμοποιήσουμε, κάπως, το κριτήριο παρεμβολής. Ναι, αλλά πού είναι η δεύτερη ανισότητα; Ας ξεκινήσουμε λίγο, «καθαρογράφοντας» τη δοσμένη ανισότητα[42]:

$$\begin{aligned}
&xf(x)\left(f(x)-2\,\text{συν}\,\frac{1}{x}\right)\leq|\text{ημ}\,x|+x\left(\text{ημ}^2\,\frac{1}{x}-1\right)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow f(x)\left(f(x)-2\,\text{συν}\,\frac{1}{x}\right)\leq\frac{|\text{ημ}\,x|}{x}+\left(\text{ημ}^2\,\frac{1}{x}-1\right)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x}\leq\frac{|\text{ημ}\,x|}{x}-\left(1-\text{ημ}^2\,\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x}\leq\frac{|\text{ημ}\,x|}{x}-\text{συν}^2\,\frac{1}{x}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)\,\text{συν}\,\frac{1}{x}\,\text{συν}^2\,\frac{1}{x}\leq\frac{|\text{ημ}\,x|}{x}\Leftrightarrow
\end{aligned}$$

[42] Πάντα, αφού $x\to+\infty$, υποθέτουμε ότι $x>0$.

$$\Leftrightarrow \left(f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right)^2 \leq \frac{|\text{ημ}\,x|}{x}.$$

Τι λες τώρα; Και η δεύτερη ανισότητα, από τα αριστερά, πού είναι; Λοιπόν, αν σκεφτούμε ψύχραιμα, θα θυμηθούμε, από το γυμνάσιο ακόμα, ότι,

$$a^2 \geq 0,$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$, επομένως, στην προκειμένη έχουμε, τελικά:

$$0 \leq \left(f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right)^2 \leq \frac{\text{ημ}\,x}{x}.$$

Τώρα, αφού:

$$\lim_{x\to+\infty} 0 = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\text{ημ}\,x}{x},$$

έπεται, από το κριτήριο παρεμβολής, ότι το υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right)^2 = 0,$$

άρα, από το θεώρημα ορίου σύνθετης συνάρτησης, υπάρχει και το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \left|f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right| = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\left(f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right)^2} = 0,$$

Επομένως[43],

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Επίσης, υπάρχει και το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \text{συν}\,\frac{1}{x} \overset{y=\frac{1}{x}}{\underset{y\to 0}{=\!=\!=}} \lim_{y\to 0} \text{συν}\,y = 1,$$

επομένως:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x} + \text{συν}\,\frac{1}{x}\right) = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \text{συν}\,\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty} \text{συν}\,\frac{1}{x} = \\ &= 0 + 1 = 1.\end{aligned}$$

□

2.4 Μία εφαρμογή των όσων είδαμε ως τώρα: Ασύμπτωτες γραφικής παράστασης συνάρτησης

Είδαμε όρια με απροσδιόριστες μορφές, όρια χωρίς απροσδιροστες μορφές, όρια απλά, όρια δύσκολα, φτάσαμε στα όριά μας, γενικά[44] αλλά δεν είδαμε ακόμα πώς μπορούν τα όρια να μας βοηθήσουν να πετύχουμε τον σκοπό μας, που, θυμίζουμε, είναι να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας οποιασδήποτε συνάρτησης μας δοθεί. Πριν από αυτό, ας δούμε πρώτα τι πληροφορίες μπορεί να μας δώσει ένα όριο[45].

[43] Γιατί;

[44] Εντάξει, σταματάει το αστείο εδώ...

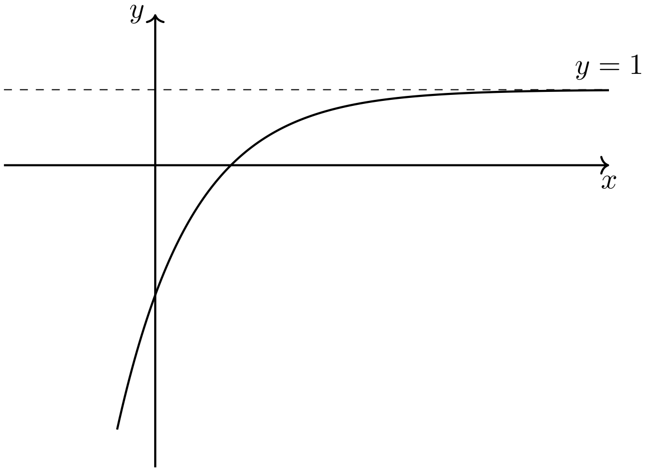
[45] Γενικά, μέσα από τα όρια μπορούμε, πέρα από εκτιμήσεις, όπως είχαμε δει στο πρόβλημα της πετρελαιοκηλίδας, να μελετήσουμε και φαινόμενα σε «παθολογικά» σημεία, δηλαδή σε σημεία που δεν έχουμε καλή συμπεριφορά, αλλά

2.4.1 Όρια συνάρτησης στο άπειρο

Ας πάρουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 - e^{1-x}$. Αν υπολογίσουμε το όριό της στο $+\infty$, βλέπουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 - e^{1-x}) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1.$$

Αν χαράξουμε και τη γραφική της παράσταση, όπως ξέρουμε πολύ καλά[46] βλέπουμε ότι αυτή έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 2.15. Επιβεβαιώνουμε έτσι, σχετικά εύκολα, αυτό που βρήκαμε



Σχήμα 2.15: Η γραφική παράσταση της $f(x) = 1 - e^{1-x}$

στους υπολογισμούς μας· καθώς η $x \to +\infty$ η $f(x) \to 1$, δηλαδή, όσο «προχωράμε» προς τα δεξιά, θα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να πλησιάζει όλο και περισσότερο την ευθεία $y = 1$.

Ας πάρουμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x}\,\text{ημ}\,x$. Εδώ, μπορούμε να δούμε ότι:

$$|\text{ημ}\,x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \text{ημ}\,x \leq 1 \Leftrightarrow -e^{-x} \leq g(x) \leq e^{-x}$$

και ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} (-e^{-x}) = 0 = \lim_{x\to+\infty} e^{-x},$$

οπότε, από το κριτήριο παρεμβολής:

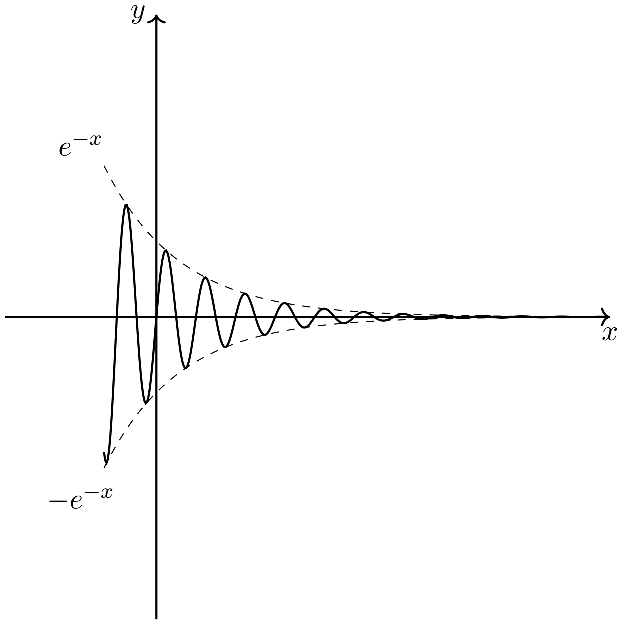
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Αν χαράξουμε και τη γραφική παράσταση[47] της g, όπως αυτή φαίνεται στο σχήμα 2.16, παρατηρούμε, και πάλι, ότι καθώς $x \to +\infty$, η $f(x) \to 0$, δηλαδή, η γραφική παράσταση της f, όσο «προχωράμε» προς τα δεξιά, πλησιάζει όλο και περισσότερο τον άξονα $x'x$ (δηλαδή την ευθεία $y = 0$). Ας δούμε

θα θέλαμε να ξέρουμε τι συμβαίνει. Επίσης, μπορούμε να μελετήσουμε και την εξέλιξη διαφόρων φαινομένων μέσα στον χρόνο καθώς ο χρόνος περνά ($t \to +\infty$).

[46]Ξεκινάμε από την e^x, περνάμε στην e^{-x} με μία ανάκλαση ως προς τον άξονα $y'y$, περνάμε στην $e^{1-x} = e^{-(x-1)}$ με μία μεταφορά προς τα δεξιά κατά 1, περνάμε στην $-e^{1-x}$ με μία ανάκλαση ως προς τον $x'x$ και, τέλος, περνάμε στην $f(x)$ με μία μεταφορά προς τα πάνω κατά 1.

[47]Δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της g ακόμα, αλλά ένα τρυκ που βοηθά σε αρκετές περιπτώσεις που έχουμε να κάνουμε με συναρτήσεις της μορφής $f(x)\,\text{ημ}\,x$ είναι να σχεδιάζουμε πρώτα τις f και $-f$ και, στη συνέχεια, να παρεμβάλουμε ανάμεσά τους ένα «κύμα», όπως είναι η γραφική παράσταση του ημιτόνου. Όλα αυτά, μόνο για να πάρουμε μια ιδέα, όχι γενικά. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί αυτός ο τρόπος είναι σχετικά ακριβής; Γιατί σχεδιάζουμε και την f και τη $-f$;

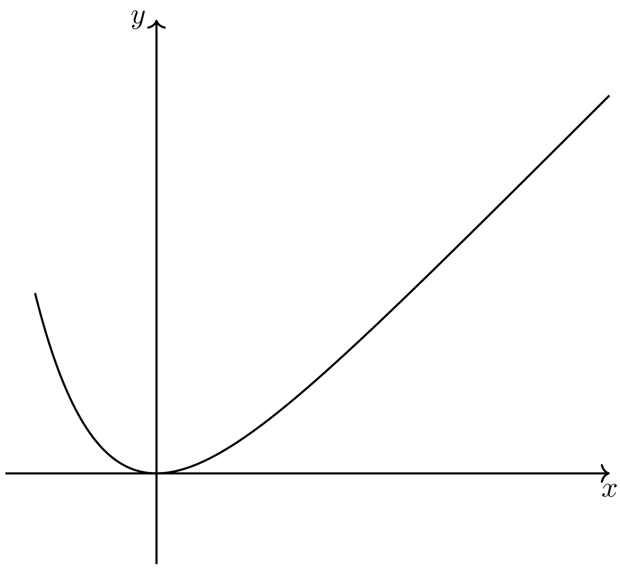


Σχήμα 2.16: Η γραφική παράσταση της $g(x) = e^{-x}$ ημ x

άλλη μία, πιο παράξενη, περίπτωση. Για τη συνάρτηση $h(x) = e^{-x} + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, αν υπολογίσουμε το όριό της στο $+\infty$, βλέπουμε ότι:

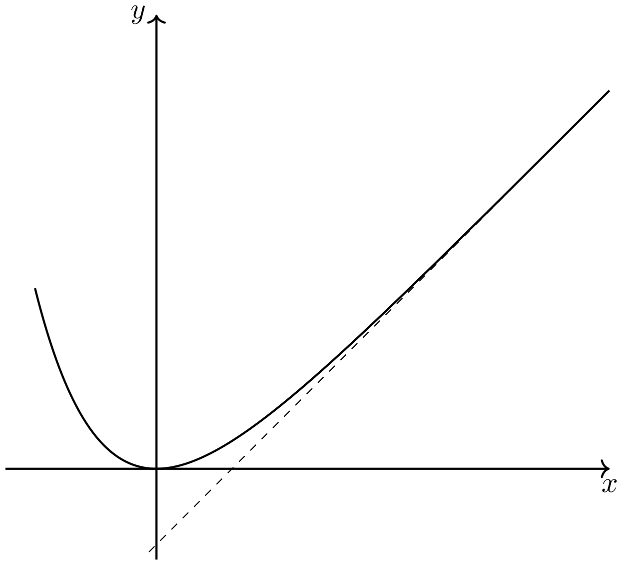
$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^{-x} + x - 1) = 0 + (+\infty) - 1 = +\infty.$$

Άρα, εδώ η h δεν πλησιάζει προς κάποιον αριθμό όσο «προχωράμε» προς τα δεξιά, άρα και η γραφική παράσταση της h δε θα πλησιάζει κάποια ευθεία της μορφής $y = c$, για $c \in \mathbb{R}$. Αυτό φαίνεται και από τη γραφική της παράσταση, στο σχήμα 2.17. Όπως όμως θα παρατηρήσει κανείς, φαίνεται

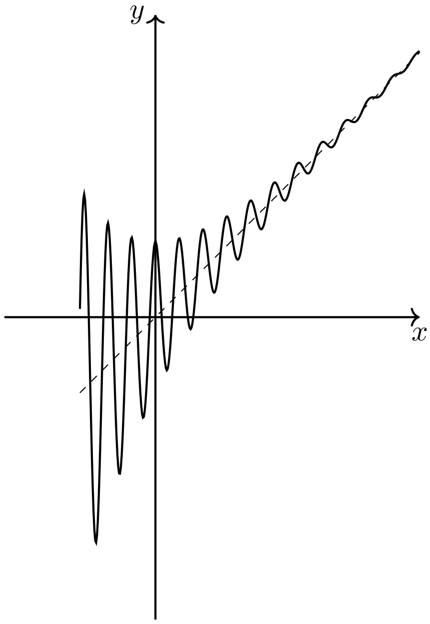


Σχήμα 2.17: Η γραφική παράσταση της $h(x) = e^{-x} + x - 1$

λες και η γραφική παράσταση της h πλησιάζει προς κάποια ευθεία της μορφής $y = \lambda x + \beta$. Αν ρίξουμε μια ματιά στο σχήμα 2.18 θα δούμε ότι, πράγματι, αν σχεδιάσουμε την ευθεία $y = x - 1$, η παρατήρησή μας επαληθεύεται άμεσα. Αν παίξουμε λίγο ακόμα, θα δούμε ότι και η συνάρτηση $s(x) = e^{-x}$ συν $x + x$ έχει παρόμοια συμπεριφορά, καθώς $x \to +\infty$, όπως φαίνεται και στο σχήμα



Σχήμα 2.18: Η γραφική παράσταση της $h(x) = e^{-x} + x - 1$ με την ευθεία $y = x - 1$.



Σχήμα 2.19: Η γραφική παράσταση της $s(x) = e^{-x}\,\text{συν}\,x + x$ με την ευθεία $y = x$.

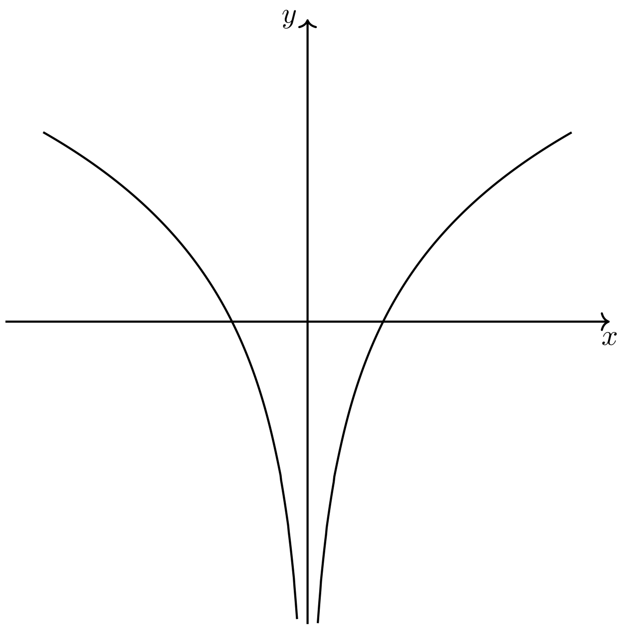
2.19. Ενδέχεται όμως να παρατηρήσουμε και παρόμοια ασυμπτωτική συμπεριφορά σε μία ακόμα περίπτωση.

2.4.2 Όρια συνάρτησης στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της

Ας πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x^2$, $x \neq 0$. Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \ln x^2 \overset{y=x^2}{\underset{y\to 0}{=\!=}} \lim_{y\to 0} \ln y = -\infty,$$

δηλαδή, όσο πλησιάζουμε το 0, εκατέρωθεν, η $f(x) \to -\infty$, δηλαδή μειώνεται απεριόριστα πολύ. Αυτό αποτυπώνεται γεωμετρικά και στη γραφική της παράστασης όπως φαίνεται στο σχήμα 2.20. Ανάλογη συμπεριφορά παρουσιάζει και η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$, καθώς, αν και το όριο:



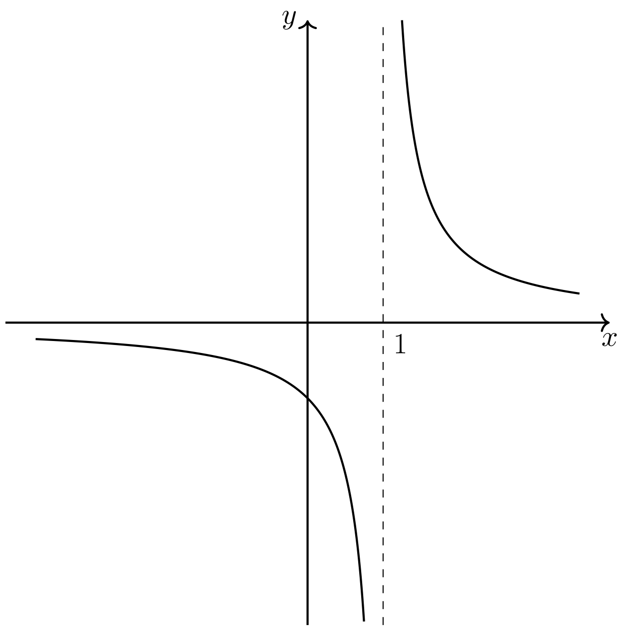
Σχήμα 2.20: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \ln x^2$.

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

δεν υπάρχει, τα δύο πλευρικά όρια υπάρχουν και μάλιστα:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty,$$

το οποίο γεωμετρικά αποτυπώνεται στο σχήμα 2.21. Αντίστοιχα, και για τη συνάρτηση



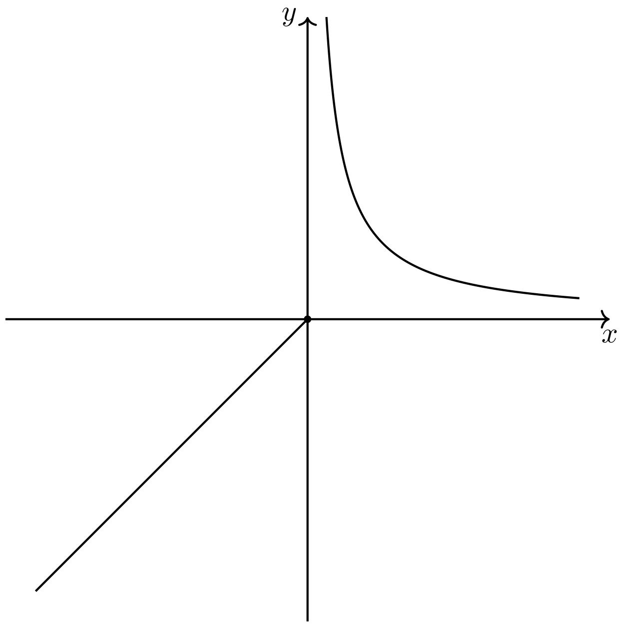
Σχήμα 2.21: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{αν } x > 0 \\ x & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

παρατηρούμε ότι, ενώ το όριό της στο 0 δεν υπάρχει, για τα πλευρικά της όρια έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,$$

το οποίο γεωμετρικά αποτυπώνεται στο σχήμα 2.22. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις παρατηρούμε



Σχήμα 2.22: Η γραφική παράσταση της f.

ότι, καθώς πλησιάζουμε έναν αριθμό x_0 από τουλάχιστον μία μεριά, το αντίστοιχο πλευρικό όριο της συνάρτησης απειρίζεται, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης να προσεγγίζει μία ευθεία απεριόριστα πολύ, χωρίς όμως να συμπίπτει με αυτή. Αυτό που επί της ουσίας συμβαίνει και στις δύο περιπτώσεις (είτε η ευθεία είναι της μορφής $x = x_0$ είτε της μορφής $y = \lambda x + \beta$) είναι ότι η συνάρτηση προσεγγίζει την ευθεία οσοδήποτε κοντά επιθυμούμε, δηλαδή:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0$$

ή, αν η ευθεία έχει μορφή $x = x_0$:

$$\lim_{x\to x_o^{\pm}} f(x) = \pm\infty.$$

2.4.3 Ορισμός ασύμπτωτης γραφικής παράστασης συνάρτησης

Όλα τα παραπάνω παραδείγματα, μας οδηγούν στο να ορίσουμε την έννοια της *ασύμπτωτης* της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης, διακρίνοντας δύο περιπτώσεις:

1. Αν η συνάρτηση, καθώς το $x \to \pm\infty$ προσεγγίζει απεριόριστα μία ευθεία της μορφής $y = \lambda x + \beta$, τότε θα μιλούμε για *πλάγια ασύμπτωτη*. Σε αυτήν την περίπτωση δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.10: Μ

α ευθεία $y = \lambda x + \beta$ θα λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα $-\infty$) αν:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \lambda y - \beta) = 0 \text{ (αντίστοιχα, } \lim_{x\to-\infty}(f(x) - \lambda x - \beta) = 0),$$

και $\lambda \neq 0$. Αν $\lambda = 0$, η ασύμπτωτη θα λέγεται οριζόντια[α΄].

[α΄] Αυτή είναι μια διάκριση που κάνει το σχολικό βιβλίο.

2. Αν η συνάρτηση προσεγγίζει μία κατακόρυφη ευθεία (της μορφής $x = x_0$) για κάποιο x_0, τότε θα μιλούμε για *κατακόρυφη ασύμπτωτη*. Σε αυτήν την περίπτωση δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.11

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της f αν **τουλάχιστον** ένα από τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

2.4.4 Εύρεση ασυμπτώτων γραφικής παράστασης συνάρτησης

Για να βρούμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης πρέπει να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της f στις εξής περιπτώσεις:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

στις εξής περιπτώσεις:

- στα $\pm\infty$,
- στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού της,
- στα x_0 στα οποία το όριο της f δεν υπάρχει ή υπάρχει και δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Παρατήρηση 2.8. Προφανώς, δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις ασύμπτωτες[48] και επίσης, δεν επιβάλλεται μία συνάρτηση να έχει ασύμπτωτες όλων των τύπων (και κατακόρυφες και πλάγιες και οριζόντιες). Αυτό θα φανεί και στα επόμενα παραδείγματα.

□

Θα δούμε τώρα ένα βασικό θεώρημα που θα κάνει την εύρεση πλαγίων ασυμπτώτων πιο εύκολη.

Θεώρημα 2.2

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη κοντά στο $+\infty$ (αντίστοιχα, κοντά στο $-\infty$). Τότε, μία ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ (αντίστοιχα $-\infty$) **αν και μόνον αν** ισχύουν οι ακόλουθες δύο συνθήκες:

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ (αντίστοιχα $x \to -\infty$) και
2. $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$ (αντίστοιχα $x \to -\infty$).

Απόδειξη. Εφ' όσον έχουμε να αποδείξουμε μία ισοδυναμία (αν και μόνον αν), πρέπει να αποδείξουμε δύο κατευθύνσεις. Ξεκινάμε με το ευθύ.

[48] Γιατί;

(⇒) Έστω ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$. Τότε, εξ ορισμού:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \lambda x - \beta) = 0.$$

Θέτουμε $g(x) = f(x) - \lambda x - \beta$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ και:

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) - \lambda x - \beta \Leftrightarrow g(x) = x\left(\frac{f(x)}{x} - \lambda - \frac{\beta}{x}\right) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - \lambda - \frac{\beta}{x} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - \lambda = \frac{g(x)+\beta}{x}&. \end{aligned}$$

Τώρα, παίρνοντας όρια στην παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - \lambda\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+\beta}{x} = \frac{0+\beta}{+\infty} = 0,$$

άρα:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \lambda x - \beta) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x) - \lambda x) = \beta,$$

οπότε ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες.

(⇐)Έστω ότι ικανοποιούνται οι δύο συνθήκες, δηλαδή ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to+\infty}(f(x) - \lambda x) = \beta \in \mathbb{R}.$$

Για να δείξουμε ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \lambda x - \beta) = 0.$$

Αυτό όμως είναι άμεσο, αφού:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \lambda x) = \beta \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x) - \lambda x - \beta) = 0,$$

οπότε το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

□

Άμεσο πόρισμα του παραπάνω είναι ότι, για να εξετάσουμε αν μία συνάρτηση έχει ασύμπτωτες και, σε περίπτωση που έχει, να τις βρούμε, είναι να υπολογίσουμε τα όριο:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$

και αν αυτό είναι ίσο με $\lambda \in \mathbb{R}$, να εξετάσουμε και το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \lambda x)$$

και, αν και αυτό είναι ίσο με $\beta \in \mathbb{R}$ τότε να αποφανθούμε ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Ας δούμε τώρα κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.39. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι το όριο της f υπάρχει. Επομένως, αρκεί να εξετάσουμε τα $\pm\infty$ και 0 για την ύπαρξη ασυμπτώτων.

- Για το $+\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = $$
$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1,$$

  επομένως $\lambda = 1$. Για το δεύτερο όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

  επομένως $\beta = 0$ και, επομένως, η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

- Για το $-\infty$, εργαζόμαστε ανάλογα και προκύπτει ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της f και στο $-\infty$.

- Υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0 + (-\infty) = -\infty$$

  και

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 + (-\infty) = +\infty$$

  οπότε και η ευθεία $x = 0$ (ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

□

Παράδειγμα 2.40. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης: $f(x) = |x| + \frac{\eta\mu\, x}{x}$, $x \neq 0$.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, οπότε πρέπει να αναζητήσουμε ασύμπτωτες στα $\pm\infty$ και 0.

- Στο $+\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x| + \frac{\eta\mu\, x}{x}}{x} \overset{|x|=x}{\underset{x>0}{=\!=\!=}} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\eta\mu\, x}{x^2}\right) =$$
$$= 1 + 0 = 1,$$

  αφού $-1 \leq \eta\mu\, x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \eta\mu\, x \leq \frac{1}{x^2}$ και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

  άρα, από το κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\, x}{x^2} = 0.$$

  Επομένως $\lambda = 1$. Για το άλλο όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to+\infty} \left(|x| + \frac{\eta\mu\, x}{x} - x\right) \overset{|x|=x}{\underset{x>0}{=\!=\!=}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{\eta\mu\, x}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu\, x}{x} = 0.$$

  Επομένως, η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

- Για το $-\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|+\frac{\eta\mu\, x}{x}}{x}\;\overset{|x|=-x}{\underset{x<0}{=\!=\!=}}\;\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{x}+\frac{\eta\mu\, x}{x^2}\right)=$$
$$=-1+0=-1,$$

αφού $-1\le \eta\mu\, x\le 1\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}\le \eta\mu\, x\le \frac{1}{x^2}$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0,$$

άρα, από το κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu\, x}{x^2}=0.$$

Επομένως $\lambda=-1$. Για το άλλο όριο:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|+\frac{\eta\mu\, x}{x}+x\right)\;\overset{|x|=x}{\underset{x>0}{=\!=\!=}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{\eta\mu\, x}{x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu\, x}{x}=0.$$

Επομένως, η ευθεία $y=-x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

- Για το 0 υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(|x|+\frac{\eta\mu\, x}{x}\right)=0+1=1$$

και

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(|x|+\frac{\eta\mu\, x}{x}\right)=0+1=1$$

επομένως το όριο $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1\in\mathbb{R}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, άρα δεν έχουμε ασύμπτωτη.

□

Παράδειγμα 2.41. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$.

Από το πεδίο ορισμού της f είναι σαφές ότι θα αναζητήσουμε ασύμπτωτες στα σημεία $-1,1$.

- Για το 1, υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Θέτουμε $y=1-x^2$, οπότε, αφού:

$$\lim_{x\to1^-}(1-x^2)=1-1=0,$$

έχουμε:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{y\to0^+}\frac{1}{\sqrt{y}}=+\infty,$$

διότι $\sqrt{y}>0$ κοντά στο 0 και $\lim\limits_{y\to0^+}\sqrt{y}=0$. Επομένως η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

- Για το -1 εργαζόμαστε αναλόγως[49] και προκύπτει ότι η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

□

[49]Εναλλακτικά, παρατηρήστε ότι η f είναι άρτια και υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ θέτοντας $y=-x$.

2.5 Ασκήσεις

2.5.1 Ερωτήσεις Σωστού ή Λάθους

Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες** και, για όσες είναι σωστέ, να αιτολογήσετε κατάλληλα, ενώ, για όσες είναι λανθασμένες, να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

1. Αν $f(x)=\frac{1}{x-4}$, τότε, το όριο:
$$\lim_{x\to 4} f(x)$$
υπάρχει και είναι $+\infty$.

2. Υπάρχει το όριο:
$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}.$$

3. Δεν υπάρχει το όριο:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{συν}\, x}{x}.$$

4. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, τότε υπάρχουν και τα όρια:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ και } \lim_{x\to x_0} g(x).$$

5. Υπάρχει το όριο:
$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}.$$

6. Αν το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει, τότε ούτε το όριο:
$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^2$$
υπάρχει.

7. Αν
$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=2019,$$
τότε $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$.

8. Το όριο:
$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^{1944}}{(x+1)^{2019}}$$
δεν υπάρχει.

9. Το όριο της συνάρτησης:
$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-4x & x<0 \\ \frac{\text{συν}\, x-1}{x} & x\geq 0, \end{cases}$$
υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

10. Αν τα όρια:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ και } \lim_{x\to x_0} g(x)$$
δεν υπάρχουν, τότε δεν υπάρχει και το όριο:
$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right).$$

11. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, τότε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει αν και μόνον αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))$.

12. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$ τότε υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

13. Αν $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι τρεις συναρτήσεις τέτοιες ώστε:
   - $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lambda=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ και
   - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lambda$,

   τότε $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ ή $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0.

14. Ισχύει ότι:
$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty, \text{ για κάθε } a>0.$$

15. Αν $f(4)=2019$ και η f είναι ορισμένη κοντά στο 4, τότε:
$$\lim_{x\to 4} f(x)=2019.$$

16. Αν $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχουν τα όρια:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x\to+\infty} g(x),$$
τότε:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\leq\lim_{x\to+\infty} g(x).$$

17. Αν το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει, τότε ούτε το όριο:
$$\lim_{x\to x_0} |f(x)|$$
υπάρχει.

18. Δεν έχει νόημα να αναζητήσουμε το όριο:
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

19. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, τότε:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

20. Αν $f(x) > 2019$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το όριο $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ υπάρχει, τότε:
$$\lim_{x\to 3} f(x) > 2019.$$

21. Αν $|f(x)| \le 6$ για κάθε x κοντά στο -6, τότε υπάρχει το όριο:
$$\lim_{x\to -6} (x+6)f(x).$$

22. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, τότε υπάρχει και το όριο:
$$\lim_{x\to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

23. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, τότε υπάρχει και το όριο:
$$\lim_{x\to 1} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

24. Το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty} f(\text{ημ}\, x)$ δεν υπάρχει για καμμία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

25. Αν $\lim\limits_{x\to 2} |f(x)| = 4$ τότε:
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \text{ ή } \lim_{x\to 2} f(x) = -4.$$

26. Υπάρχει το όριο:
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\text{συν}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \text{ημ}\, x\right).$$

27. Αν $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$, τότε:
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = +\infty \text{ ή } \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

28. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ τότε:
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

29. Για κάθε περιττή συνάρτηση:
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

30. Για κάθε άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(-x)) = 0.$$

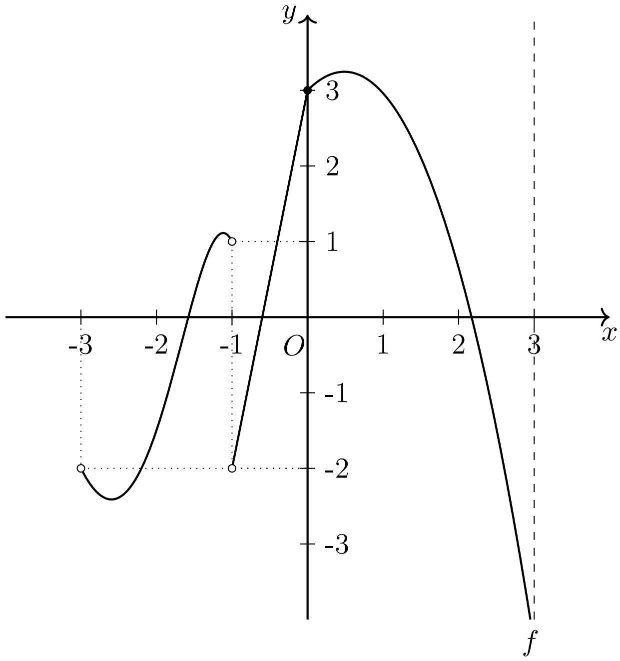
2.5.2 Α΄ Ομάδα

1. Να βρείτε τα σημεία συσσώρευσης των παρακάτω συνόλων:
   (α΄) $(-4, 7]$,
   (β΄) $(-\infty, 3) \cup (4, 9)$,
   (γ΄) $(0, 1) \cup \{2\} \cup [3, +\infty)$.

2. Έστω μία μεταβλητή x που παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Μπορείτε να δώσετε τιμές στην x έτσι ώστε αυτή να παίρνει τιμές οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο 3, χωρίς όμως να τείνει στο 3 (δηλαδή $x \not\to 3$);

3. Μπορείτε να δώσετε τιμές σε μία μεταβλητή x έτσι ώστε αυτή να παίρνει τιμές οσοδήποτε κοντά στο 1 και οσοδήποτε κοντά στο 2; Ισχύει $x \to 1$ ή $x \to 2$;

4. Αν $f : (-3, 3) \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση με γραφική παράσταση όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 2.23, να υπολογίσετε τα όρια:
   (α΄) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$,
   (β΄) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$,
   (γ΄) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$,



Σχήμα 2.23: Η συνάρτηση f

(δ′) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$,

5. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to -\infty} \text{συν}\, x.$$

6. Να βρείτε δύο συναρτήσεις f, g, διαφορετικές μεταξύ τους, έτσι ώστε τα όρια:

$$\lim_{x\to 4} f(x) \text{ και } \lim_{x\to 4} g(x)$$

να μην υπάρχουν αλλά το όριο:

$$\lim_{x\to 4}(f(x) - g(x))$$

να υπάρχει.

7. Σε αυτήν την άσκηση θα προσπαθήσουμε να δούμε πόσο «κακές» συναρτήσεις μπορούμε να κατασκευάσουμε υπό την εξής έννοια: θα προσπαθούμε να βρούμε σε κάθε βήμα μία συνάρτηση που να μην έχει όριο σε όλο και περισσότερα σημεία.

(α′) Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να μην υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to 1} f(x).$$

(β′) Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να μην υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \text{ και } \lim_{x\to 2} f(x).$$

(γ′) Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να μην υπάρχει τα όρια:

$$\lim_{x\to k} f(x),$$

για κανένα $k = 1, 2, \ldots, 100$.

(δ′) Να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να μην υπάρχει τα όρια:

$$\lim_{x\to k} f(x),$$

για κανένα $k \in \mathbb{N}$.

(ε′) Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, προσεγγιστικά.

(ϛ′) Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το όριο:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

να μην υπάρχει για κανένα $x \in \mathbb{R}$; Αν ναι, ποια; Αν όχι, γιατί;

8. Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση f για την οποία να ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

και η $f(x)$ να μην είναι ούτε (μόνο) θετική ούτε (μόνο) αρνητική κοντά στο 0;

9. Μπορούμε να παραλείψουμε κάποια από τις υποθέσεις στο κριτήριο παρεμβολής;

10. Μπορείτε να βρείτε δύο συναρτήσεις f, g και ένα $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ τέτοιες ώστε τα όρια:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$
και
$$\lim_{y \to y_0} g(y) = \lambda$$
να υπάρχουν αλλά να μην υπάρχει το όριο της σύνθεσής τους στο x_0:
$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x);$$

11. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:
   (α′) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$,
   (β′) $g(x) = e^{-x}\,\text{συν}\,x$,
   (γ′) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$,
   (δ′) $s(x) = \dfrac{x^2+2x}{x+1}$.

12. Ο συμμαθητής σας ο Φρειδερίκος έχει την εξής άποψη: «Αν μία συνάρτηση f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = x$ τότε θα είναι γνησίως αύξουσα κοντά στο $+\infty$, διότι, καθώς πλησιάζουμε στο $+\infty$, η συνάρτηση πλησιάζει την ευθεία $y = x$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα». Τι έχετε να πείτε; Συμφωνείτε ή διαφωνείτε;

13. Μπαίνετε σε ένα σχολείο όπου όλοι οι μαθητές της Γ' λυκείου έχουν τρομερή αγάπη για τα μαθηματικά. Έτσι, ένας από αυτούς, ο Ροδόλφος, έρχεται μπροστά σας και σάς λέει το εξής:

   - Καθώς το $x \to 1000$, το $\dfrac{1}{x}$ μικραίνει όλο και πιο πολύ, πλησιάζοντας το μηδέν, επομένως έχουμε ότι:
   $$\lim_{x \to 1000} \frac{1}{x} = 0.$$

   Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον Ροδόλφο; Εξηγήστε την απάντησή σας.

   Μετά από λίγο, έρχεται μπροστά σας μία άλλη μαθήτρια του σχολείο, η Γιολάντα[50]. Μετά τις απαραίτητες συστάσεις, σας λέει:

   - Αν γνωρίζουμε ότι:
   $$\lim_{x \to 5} f(x) = 12,$$
   τότε, αν επιλέξουμε x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της f και κοντά στο 5 έτσι ώστε το x_2 να είναι πιο κοντά στο 5 από το x_1, έπεται ότι και το $f(x_2)$ θα είναι πιο κοντά στο 12 από το $f(x_1)$.

   Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον Ροδόλφο; Εξηγήστε την απάντησή σας.

   Έπειτα από λίγο, έρχεται μπροστά σας ο Αμάραντος, ο οποίος σάς λέει με στόμφο:

   - Βρήκα έναν άπαιχτο τρόπο για να υπολογίζω όρια στο 0. Ας πούμε ότι θέλω να βρω το όριο:
   $$\lim_{x \to 0} f(x).$$
   Παίρνω την αριθμομηχανή μου και υπολογίζω τα $f(0.1)$, $f(0.01)$, $f(0.001)$ κ.λπ., μέχρι να καταλάβω προς τα πού πάει το όριο και μετά καταλαβαίνω ποιο είναι. Έτσι, έχω μία ιδέα πριν πάω να δω πόσο κάνει το όριο.

   Τι έχετε να πείτε για τη «μέθοδο του Αμάραντου»; Εξηγήστε την απάντησή σας.

14. Έχουμε δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις — και οι δύο είναι ευθείες:

   Να υπολογίσετε, χωρίς να ταλαιπωρηθείτε με πολλές πράξεις, τα παρακάτω όρια:
   (α′) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$,
   (β′) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$,
   (γ′) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$,
   (δ′) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.
   (ε′) $\displaystyle\lim_{x \to y} \frac{f(x)}{g(x)}$, για οποιοδήποτε $y \in \mathbb{R}$.

   Σε κάθε περίπτωση, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

[50] Το ότι εμφανίζονται μαθητές που σας μιλάνε για μαθηματικά με το που σας βλέπουν είναι κάτι σαν σκηνή από θρίλερ...

2.5.3 Β′ Ομάδα

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:
   (α′) $\lim\limits_{x\to 0} x^2-3x+2$,
   (β′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$,
   (γ′) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$,
   (δ′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$
   (ε′) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$,
   (ϛ′) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-3x}{x}$.
2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:
   (α′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$,
   (β′) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$,
   (γ′) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$,
   (δ′) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$,
   (ε′) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$,
   (ϛ′) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{3-x}-2}{x+1}$,
   (ζ′) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{2-x}-2}{x+2}$.
3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:
   (α′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$,
   (β′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$,
   (γ′) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$,
   (δ′) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-5x+6}$,
   (ε′) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-3x+2}$,
   (ϛ′) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+3x+2}$,
   (ζ′) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{2-x}-2}{x^2+5x+6}$,
   (η′) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x^2+2x}$,
   (ϑ′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x^2-3x+2}$,
   (ι′) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+2}-2}{x^2+4x+3}$,
   (ια′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+7}-2}{x^2-x}$,
   (ιβ′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{x^2+x-2}$,
   (ιγ′) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-5x+10}-2}{x^2-x-2}$,
   (ιδ′) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+4x+7}-2}{x^2+3x+2}$.
4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:
   (α′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x^2+x+1}-(x+1)}{x^2-4x+3}$,
   (β′) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x^2+3x-5}-x-1}{x^2-3x+2}$,
   (γ′) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{2x^2-2x+12}-x-2}{x^2+3x+2}$,
   (δ′) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-x+9}-x-3}{x^2+4x}$,
   (ε′) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{2-x}-2}{x^3-2x+4}$,
   (ϛ′) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{2x^4-2x^3-5x^2+2x}$,
   (ζ′) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^9+x^7+x^5+x^3+x^2+2019x}$,
   (η′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+6}-2}{2x^6-3x+1}$,
   (ϑ′) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2-x+2}-2}{x^3-2x-1}$,
   (ι′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x^2-2x+4}-x-1}{x^4-3x+2}$.

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$,

(β′) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{x+5}-2}$,

(γ′) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x+6}-2}{\sqrt{x+3}-1}$,

(δ′) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{3-x}-2}$,

(ε′) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{1-x}-1}$.

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt[3]{x-3}-2}{x^2-11x+10}$,

(β′) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^3+5x^2}$,

(γ′) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ημ}\, x(1-\text{συν}\, x)}{x^2}$.

7. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2-4}$,

(β′) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{x^3+8}$,

(γ′) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^3-3x^2-9x+27}$.

8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|2-x|+x^2-4x+4}{|x^2-x-2|}$,

(β′) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\left|x^2-3x\right|+\left|x^2-4x+3\right|}{|x^2-5x+6|}$,

(γ′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left|x^3-3x^2+2x\right|+x-1}{2x^2-5x+3}$,

(δ′) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\text{συν}^2\, x}{x^4}$.

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′) $\lim\limits_{x\to -\infty} -4x^3+3x^2-2x+6$,

(β′) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6x^4+x^3+3x}{-7x^6+11x^3+2018}$,

(γ′) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3+2x^2+x+4}{7x^3+2x}$,

(δ′) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6x^7+4x^4-3x+1}{5x^6+4x^3+2}$,

(ε′) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+5x+7}$,

(ϛ′) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{4x^1+4}$.

10. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x^2-7}-x+1}{\sqrt{3-x}-1}$,

(β′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2-x}-1}{x^3-2x+1}$,

(γ′) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|-x^2+6x-9}{|3x-x^2|}$,

(δ′) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\text{συν}\, \nu^2 x}{x}$,

(ε′) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ημ}^{2018}\, x}{x^{2020}}$,

(ϛ′) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^4-2x^3+2x-1}$,

(ζ′) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x^2+2x+1}$,

(η′) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^{16}+2x^8+4x^4+8x^2+16}{4x^{17}+3x+1}$,

(ϑ′) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3+2x^2+4x+x^{\ln 2}+e}{4x^3+7x^2+6}$,

(ι′) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2^x+5^x+4^{2x}}{3^x+6^x}$,

(ια′) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3^x+e^x+2^{3x}}{e^x+6^x+1}$,

(ιβ′) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+4x+3}}$,

(ιγ′) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}$,

(ιδ′) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{3x-\sqrt{9x^2+x+1}}$,

(ιε′) $\lim\limits_{x\to +\infty} \text{ημ}\, \dfrac{1}{x^2}$.

11. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α′) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{\frac{x-1}{x}}-1}{\frac{x-1}{x}-1}$,

(β′) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu(4x)}{x}$, (γ′) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\eta\mu(x+1)}{x+1}$,

(δ′) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\eta\mu(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$,

(ε′) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\frac{x^3-3x+3}{x^4-6x^2+3})-1}{\frac{x^3-3x+3}{x^4-6x^2+3}}$,

(ϛ′) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{2^{3x}+3^x+5^x}{e^x+2^x+4^{2x}}}$,

(ζ′) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{(x-1)^8}+\frac{5}{(x-1)^6}-\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{1}{(x-1)^2}-2}{\frac{2}{(x-1)^8}+\frac{1}{(x-1)^6}-\frac{2016}{(x-1)^4}++3}$.

12. Στις παρακάτω περιπτώσεις, να υπολογίσετε το όριο, αν αυτό υπάρχει:

$$\lim_{x\to x_0} f(x),$$

για το αντίστοιχο x_0:

(α′) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=0$, για $x_0=0$,

(β′) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x+1}{x^2-1}=2$, για $x_0=1$,

(γ′) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-f(x)}{x^3-2x+1}=2019$, για $x_0=1$,

(δ′) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\frac{\eta\mu\, x}{x}}{x^{2018}+x^{2019}+\cdots+x^2+x}=-1$, για $x_0=0$,

(ε′) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x-1)-x^2-1}{\sqrt{x}-1}=1$, για $x_0=0$,

(ϛ′) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x+1)-2x+1}{x^2-x-2}=0$, για $x_0=0$,

(ζ′) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x-1)-x^2+1}{x^2+2x-8}=2019$, για $x_0=1$,

(η′) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-\sigma\upsilon\nu\, x+e^x}{x^2-x+1}=2$, για $x_0=1$,

(ϑ′) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)f(x)+1-\eta\mu\, x^2}{\sqrt{x}+\ln(x+1)}=2019$, για $x_0=0$,

(ι′) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)f(2x-5)-x\sqrt[3]{x}}{x^2-4x+3}=1$, για $x_0=1$,

(ια′) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)+2}{(x-1)f(x)+1-x^2}=e$, για $x_0=1$,

(ιβ′) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(2)x^3+1}{f(0)x^2-xf(x)}=-2$, για $x_0=0$,

(ιγ′) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x-2)-x^2+1}{x^2-2018x+2019}=f(2)$, για $x_0=-1$.

13. Να υπολογίσετε σε κάθε περίπτωση το ζητούμενο όριο:

(α′) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x}$, αν $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1}=2018$,

(β′) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$, αν $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\eta\mu\, x}{x\,\sigma\upsilon\nu\, x-x}=\pi$,

(γ′) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$, αν $|f(x)-x\,\eta\mu\, x|\le \varepsilon\varphi^2 x$,

(δ′) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$, αν $\left|xf(x)-\eta\mu\, 2x^2\right|\le\frac{x^2}{\ln x}$.

2.5.4 Γ′ Ομάδα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=(x-2)^3$.

(α′) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να βρείτε την αντίστροφή της.

(β′) Να βρείτε τα κοινά σημεία των f και f^{-1}.

(γ′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f^{-1}(x)}{f(x)+f^{-1}(x)}.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3+x+1$.

(α′) Να τη μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

(β′) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη.

(γ′) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x) \text{ και } \lim_{x\to-\infty}f(x).$$

(δ′) Μπορείτε να σχεδιάσετε, προσεγγιστικά, τη γραφική της παράσταση;

(ε′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(x^2)}.$$

3. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x)=e^{\frac{x^3+1}{x^3+2}}$.

(α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(β′) Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

(γ′) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την ανίστροφό της.

(δ′) Να βρείτε το πεδίο τιμών της f.

(ε′) Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x\to\sqrt{e}}f^{-1}(x),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(f(x)).$$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις f με $f(x)=\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$ και $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=e^{\eta\mu x}$.

(α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(β′) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

(γ′) Να βρείτε το μεγαλύτερο $a\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε η f να είναι αντιστρέψιμη στο διάστημα $[0,a]$. Ποια είναι η αντίστροφή της σε αυτήν την περίπτωση;

(δ′) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(\ln(g(x)))=1.$$

(ε′) Να βρείτε ένα μέγιστο της f.

(ϛ′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}.$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^{x+1}}{e^x+1}$.

(α′) Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

(β′) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφό της.

(γ′) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(δ′) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\text{ και }\lim_{x\to-\infty}f(x).$$

(ε′) Να σχεδιάσετε, προσεγγιστικά, τη γραφική παράσταση της f.

(ϛ′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\text{ημ}\left(f(x)-e\right).$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\frac{\text{ημ}^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\text{ημ}^2\left(\frac{1}{x}\right)+1}.$$

(α′) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1.

(β′) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

(γ′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

(δ′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to0^+}e^{f(x)}.$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1+\ln x}{\ln x}$.

(α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(β′) Να τη μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

(γ′) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τοην αντίστροφό της.

(δ′) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(ε′) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x\to+\infty}f(x)$,

ii. $\lim_{x\to0^+}f(x)$,

iii. $\lim_{x\to1^+}f(x)$,

iv. $\lim_{x\to1^-}f(x)$.

(ϛ′) Να σχεδιάσετε, προσεγγιστικά, τη γραφική παράσταση της f.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\text{ημ}\,x}{\text{συν}\,x+2019}$.

(α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(β′) Να δείξετε ότι η f είναι περιοδική και να βρείτε την περίοδό της.

(γ′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

(δ′) Υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x);$$

9. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί την ανισότητα:

$$x+1\le f(x)\le e^x, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

(α′) Να υπολογίσετε το $f(0)$.

(β′) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(γ′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{x^{2018}+x^{2017}+\ldots+x+1}{x^{2019}+x^{2018}+\ldots+x+1}\right).$$

Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση που ικανοποιεί την ανισότητα:

$$x^2\,\text{ημ}\,\frac{1}{x}\le g(x)\le x^2, \text{ για κάθε } x\ne 0,$$

να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x).$$

10. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\ln\big((f(x))^3+f(x)+1\big)=x^3+x+1.$$

(α′) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

(β′) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

(γ′) Να δείξετε ότι όλες οι ρίζες της f είναι ακριβώς οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^3+x+1=0.$$

(δ′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x),$$

αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} g^{-1}(x)=0$, όπου $g(x)=x^3+x+1$.

11. Δίνεται μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(α′) Να δείξετε ότι, αν η f είναι άρτια, το όριο

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to -x_0} f(x)$$

και μάλιστα:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to -x_0} f(x).$$

(β′) Να δείξετε ότι, αν η f είναι περιττή, το όριο

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to -x_0} f(x)$$

και μάλιστα:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\lim_{x\to -x_0} f(x).$$

(γ′) Να δείξετε ότι, αν η f είναι περιοδική με περίοδο T, το όριο

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to x_0+kT} f(x),$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ και μάλιστα:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0+kT} f(x).$$

12. Έχουμε δει ότι μία 1-1 συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνεπαγωγή:

$$f(x)=f(y)\Rightarrow x=y, \text{ για κάθε } x,y\in A.$$

Ισχύει άραγε κάτι ανάλογο για τα όρια της συνάρτησης; Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, 1-1, τέτοια ώστε να υπάρχουν $x_0\ne y_0$ σημεία συσσώρευσης του A με

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to y_0} f(x);$$

Αν ναι, δώστε παράδειγμα μιας τέτοιας συνάρτησης, αν όχι αποδείξτε το. Μπορείτε να το ερμηνεύσετε γραφικά;

13. Μπορείτε να βρείτε μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να υπάρχουν $x_0 < y_0$ σημεία συσσώρευσης του A με:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) > \lim_{x \to y_0} f(x);$$
Αν ναι, ποια; Αν όχι, γιατί;

14. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:
$$f(x+y) = f(x)+f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$
και, επιπρόσθετα, υπάρχει το όριο:
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}.$$
(α′) Να βρείτε το $f(0)$.
(β′) Να δείξετε ότι $f(x-y) = f(x)-f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
(γ′) Να δείξετε ότι το όριο:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
υπάρχει για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και, μάλιστα, ισχύει ότι:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda.$$

15. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ που ικανοποιεί τη σχέση:
$$f(x+y) = f(x)f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$
και, επιπρόσθετα, υπάρχει το όριο:
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lambda \in \mathbb{R}.$$
(α′) Να βρείτε το $f(0)$.
(β′) Να δείξετε ότι $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
(γ′) Να δείξετε ότι το όριο:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
υπάρχει για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και, μάλιστα, ισχύει ότι:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda f(x_0).$$

16. Αν για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνωρίζετε ότι το όριο:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε:
(α′) Να δείξετε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
(β′) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα τότε να δείξετε ότι:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$
για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.
(γ′)
(δ′) Αν, αντιθέτως, γνωρίζετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα τότε να δείξετε ότι:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$
για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

17. Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση με τα εξής χαρακτηριστικά:
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- $f(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- η $y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$,
- η f δεν είναι γνησίως μονότονη κοντά στο $+\infty$;

18. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση η γραφική παράσταση της οποίας έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x - 4$, τότε:
(α′) να δείξετε ότι η f είναι θετική κοντά στο $+\infty$,
(β′) να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x},$$
(γ′) να υπολογίσετε το όριο:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

(δ΄) να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) + \eta\mu\, x$$

και, αν έχει, να την βρείτε,

(ε΄) να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\,\sigma\upsilon\nu^2 x - 2x + 2x\,\eta\mu^2 x}{x}.$$

19. Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση που να έχει μόνο μία οριζόντια ασύμπτωτη; Μόνο δύο; Μόνο τρεις; Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός οριζόντιων ασυμπτώτων που μπορεί να έχει μία συνάρτηση;

20. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$(f(x))^5 + f(x) + 3 = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω επίσης $g(x) = x^5 + x + 3$.

(α΄) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

(β΄) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

(γ΄) Να βρείτε το $f(3)$.

(δ΄) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x) = 0.$$

(ε΄) Αν γνωρίζετε ότι υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)}{x - x_0}.$$

21. Είπαμε ότι αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_0. Αλλά πόσο κοντά; Για να δούμε...

(α΄) Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ και

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

(β΄) Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

(γ΄) Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{200}\right) \cup \left(\frac{1}{200}, +\infty\right)$ και

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

(δ΄) Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{45{,}698}\right) \cup \left(\frac{1}{45{,}698}, +\infty\right)$ και

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

(ε΄) Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ για $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ και

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1,$$

για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, κοντά[51] στο 0

22. Ας δούμε λίγο ένα πρόβλημα από τα παλιά, πριν κλείσουμε τις ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου. Υπάρχουν πολλά σχήματα των οποίων το εμαβδόν δεν είναι υπολογίσιμο από κάποιον διαισθητικά προφανή τύπου. Για παράδειγμα, ενώ για τα εμβαδά του ορθογωνίου, του τετραγώνου ή ενός τριγώνου είναι εύκολο να τους εξηγήσουμε, διαισθητικά τουλάχιστον, αυτόν του κύκλου δεν το βλέπουμε να φαίνεται στον ορίζοντα. Για την ακρίβεια, ο τύπος[52]:

$$E = \pi\rho^2,$$

έχει αυτή τη μυστήρια σταθερά π, η οποία δεν είναι, μάλλον, κάτι που θα το σκεφτόταν ο καθένας. Αλλά, στα πιο παλιά χρόνια, τα περίεργα εμβαδά, δεν τα υπολόγιζαν ακριβώς έτσι.

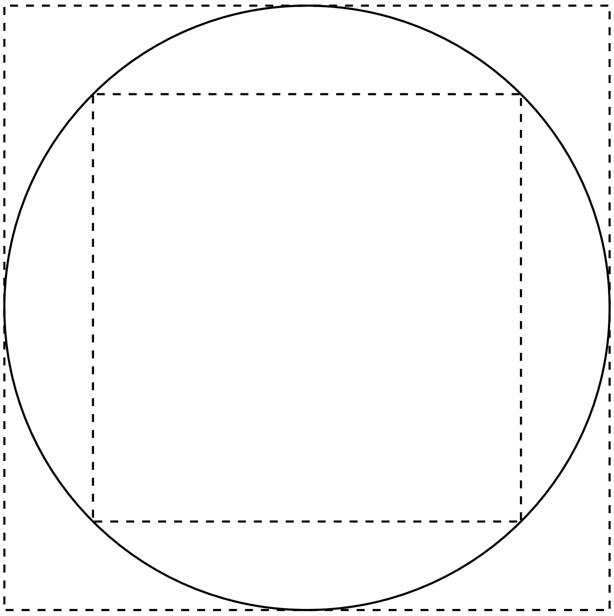
Στην αρχαία Ελλάδα, χρησιμοποιούνταν μία μέθοδος για τον υπολογισμό περίεργων

[51] Κάνουμε άσκηση για να δούμε τι πάει να πει κοντά και χρησιμοποιούμε την έννοια του κοντά; Είμαστε σοβαροί; Πάρ' τε το σαν κακό αστείο...

[52] Όποιος πει ότι δεν τον θυμόταν, μαύρο φίδι που τον έφαγε!

εμβαδών που λεγόταν *Μέθοδος της Εξάντλησης*. Αυτή η μέθοδος, με αυτό το πολύ φαντεζύ όνομα, βασιζόταν σε μία «εξαντλητική» διαδικασία που είχε ως εξής (θα την εφαρμόσουμε σε ένα κύκλο με ακτίνα $\rho = 1$):

- Σχεδιάζουμε τον κύκλο και έπειτα βρίσκουμε ένα άλλο γεωμετρικό σχήμα του οποίοι να ξέρουμε το εμβαδόν και το εγγράφουμε και το περιγράφουμε στον κύκλο[53], όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.24 (εμείς επιλέξαμε τετράγωνα).



Σχήμα 2.24: Το πρώτο βήμα της εξάντλησης

- Στη συνέχεια, αφού υπολογίσουμε το εμβαδόν των τετραγώνων, «σπάμε» κάθε πλευρά και σχεδιάζουμε δύο κανονικά *οκτάγωνα*, το ένα εγγεγραμμένο στον κύκλο και το άλλο περιγεγραμμένο, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.25.
- Αφού υπολογίσουμε τα δύο εμβαδά, συνεχίζουμε ξαναδιχοτομώντας τα οκτάγωνα σε δεκαεξάγωνα κ.ο.κ..
- Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι, όσο προχωράμε στη διαδικασία τα εγγεγραμμένα και τα περιγεγραμμένα πολύγωνα «προσεγγίζουν» τον κύκλο μας και, ως εκ τούτου, και τα εμβαδά τους θα προσεγγίζουν το εμβαδόν κύκλο. Άρα, αφού δείξουμε ότι τα «μέσα» και τα «έξω» εμβαδά προσεγγίζουν τον ίδιο αριθμό, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αυτός ο αριθμός είναι το εμβαδόν του κύκλου[54].

Ας δούμε τώρα και τι ζητάει αυτή εδώ η άσκηση:

(α΄) Σε πρώτο επίπεδο, συμφωνείτε με την ιδέα ότι, αφού τα σχήματα «πλησιάζουν» τον κύκλο, το ίδιο θα κάνουν και τα εμβαδά τους; Αναπτύξτε την απάντησή σας σε μία παράγραφο.

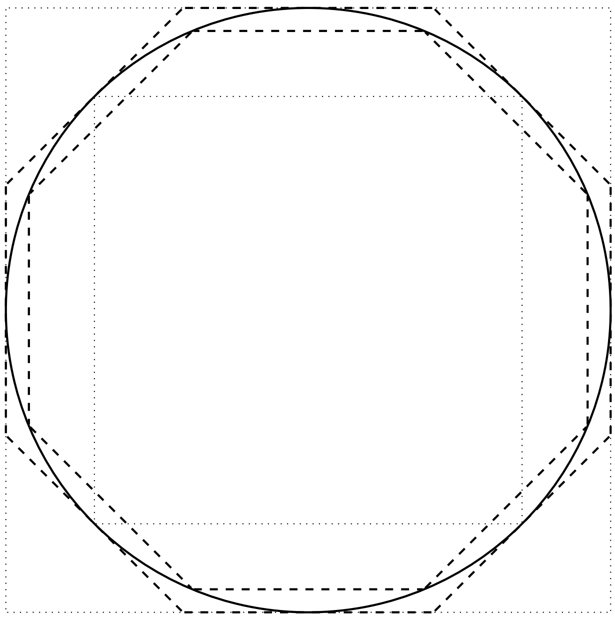
(β΄) Έπειτα, γιατί χρειάζονταν σχήματα και από «μέσα» και από «έξω»; Ποια πιστεύετε ότι ήταν η αιτία που το έκαναν αυτό οι αρχαίοι μαθηματικοί; Σας θυμίζει η όλη διαδικασία κάτι από αυτό το κεφάλαιο;

(γ΄) Μπορείτε να αποδώσετε την παραπάνω διαδικασία με τους όρους, τις έννοιες και τα σύμβολα που είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο ($\lim, \to$ κ.λπ.);

23. Ποια από τα προβλήματα του πρώτου κεφαλαίου μπορείτε να λύσετε ή, έστω, να τα πάτε λίγο παρακάτω, τώρα;

[53] Δηλαδή το σχεδιάζουμε από μέσα έτσι ώστε να ακουμπάνε οι κορυφές στον κύκλο και από έξω έτσι ώστε να ακουμπάνε οι πλευρές στον κύκλο.

[54] Και να φανταστείτε ότι αυτό που εμείς εδώ το λέμε με λόγια, ο Εύδοξος και η παρέα του το έκαναν μόνο με γεωμετρία και πολύ αυστηρά, μάλιστα.



Σχήμα 2.25: Το δεύτερο βήμα της εξάντλησης

Κεφάλαιο 3

Συνέχεια

3.1 Η έννοια της συνέχειας

3.1.1 Ο ορισμός της συνέχειας

Ας θυμηθούμε για λίγο ένα πρόβλημα που είχαμε συναντήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο, για τα όρια.

> Σε κάποιο σημείο στον Κόλπο του Μεξικού, μία γεώτρηση πετρελαίου καταβυθίζεται λόγω μιας φυσικής καταστροφής με αποτέλεσμα το πετρέλαιο που θα παρήγαγε η πηγή να καταλήγει στην επιφάνεια της θάλασσας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργείται μία κυκλική πετρελαιοκηλίδα με κέντρο το σημείο στο οποίο βρισκόταν η γεώτρηση. Για να καταφέρουμε να υπολογίσουμε πόσο θα μας κοστίσει ο καθαρισμός της περιοχής, πρέπει να έχουμε μία εικόνα του πετρελαίου που βρίσκεται στη θάλασσα και, γι' αυτόν τον σκοπό έχει μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο εξαπλώνεται το πετρέλαιο επί της επιφάνειας της θάλασσας. Πιο συγκεκριμένα, σε απόσταση r μέτρων από την πηγή, το πάχος π της κηλίδας σε μέτρα δίνεται από τη σχέση:
>
> $$\pi(r) = \frac{1}{2}\frac{r^2+3r}{r^3+r^2+4r},\ r>0.$$
>
> Για να έχουμε όμως και μία εικόνα της εξέλιξης του φαινομένου, θα ήταν χρήσιμο να ξέρουμε και το πάχος της κηλίδας στη θέση $r=0$, όπου η δοσμένη σχέση δεν ισχύει. Μήπως υπάρχει κάποιος τρόπος να κάνουμε, έστω, μία εκτίμηση του πάχους της κηλίδας εκεί;

Σε αυτό το πρόβλημα, είχαμε κάνει κάποιους υπολογισμούς και είχαμε καταλήξει στο ότι, δεδομένων των όσων ξέρουμε, μια εύλογη εκτίμηση είναι να υποθέσουμε ότι το πάχος της πετρελαιοκηλίδας σε εκείνο το σημείο είναι ίσο με το όριο:

$$\lim_{r\to 0}\pi(r),$$

το οποίο και υπολογίσαμε[1] ως εξής:

$$\lim_{r\to 0}\pi(r) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}\frac{r^2+3r}{r^3+r^2+4r} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}\frac{r(r+3)}{r(r^2+r+4)} =$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}\frac{r+3}{r^2+r+4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

[1] Τότε με άλλο τρόπο, αλλά τώρα με τις συνήθεις τεχνικές.

Ωραία, άντε και κάναμε την εκτίμησή μας, πού ξέρουμε ότι είναι σωστή; Ε, η αλήθεια είναι ότι δεν ξέρουμε πότε η εκτίμησή μας είναι σωστή χωρίς καμμία παραπάνω πληροφορία. Ας σκεφτούμε όμως το εξής:

> Αν το πάχος της πετρελαιοκηλίδας στη θέση $r = 0$ είναι όντως $\frac{3}{8}$ τότε η εκτίμησή μας είναι σωστή. Σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλαδή, αν το πάχος της πετρελαιοκηλίδας στη θέση $r = 0$ είναι διαφορετικό από το $\frac{3}{8}$, τότε η εκτίμησή μας είναι εσφαλμένη.

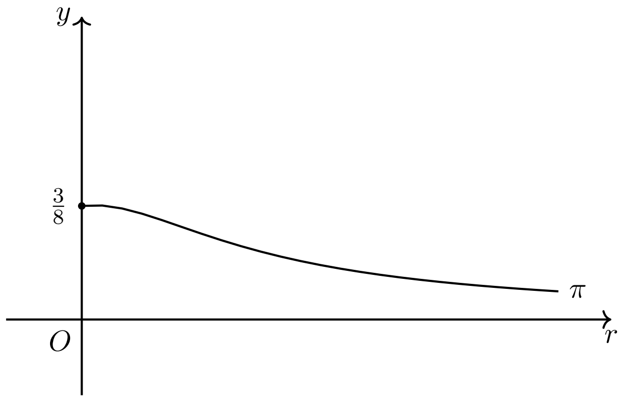
Με άλλα λόγια, αν η συνάρτηση του πάχους της πετρελαιοκηλίδας, π, οριζόταν στο 0 να είναι ίση με $\frac{3}{8}$, τότε η εκτίμησή μας είναι σωστή, δηλαδή,

$$\pi(0) = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \text{η εκτίμησή μας είναι σωστή.}$$

Προχωρώντας ένα βήμα παρακάτω, τι ήταν το $\frac{8}{3}$; Το όριο της π στο 0, δηλαδή,

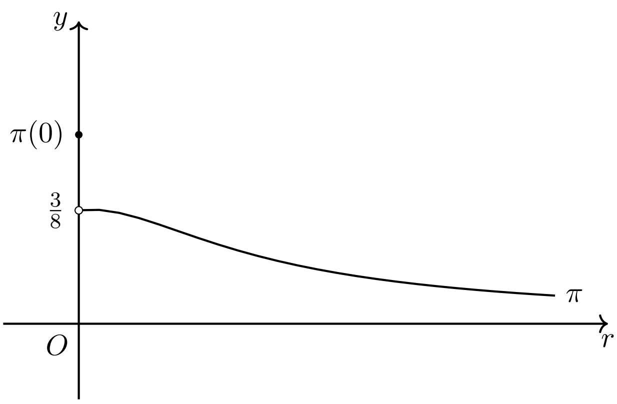
$$\lim_{r\to 0} \pi(r) = \pi(0) = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \text{η εκτίμησή μας είναι σωστή.}$$

Άρα, αν ισχύει η παραπάνω συνθήκη, η συνάρτηση π περιγράφει μία ροή η οποία είναι *συνεχής*. Για να διαφωτιστούμε επ' αυτού, ας ρίξουμε μια ματιά στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Η γραφική παράσταση της π, όταν το πάχος είναι $\frac{3}{8}$.

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι σε αυτήν την περίπτωση η γραφική παράσταση έχει μία ομαλότητα, δεν παρουσιάζει κάτι «αναπάντεχο», «πάει όπως το περιμέναμε», δηλαδή επαληθεύει την εκτίμησή μας. Αντίθετα, αν παρατηρήσουμε το σχήμα 3.2, η εκτίμησή μας είναι εσφαλμένη, πράγμα που, στη γραφική παράσταση της π, μεταφράζεται ως ένα «πηδηματάκι» στο σημείο $r = 0$.



Σχήμα 3.2: Η γραφική παράσταση της π, όταν το πάχος *δεν* είναι $\frac{3}{8}$.

Αυτήν την ιδεά της συνέχειας την γενικεύουμε στον επόμενο ορισμό, ως εξής:

Ορισμός 3.1: Συνέχεια

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$ τότε η f θα λέμε ότι είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, όλες οι βασικές συναρτήσεις που έχουμε δει ως τώρα, δηλαδή τα πολυώνυμα, οι τριγωνομετρικές, οι εκθετικές, οι λογαριθμμικές, οι ρητές, οι ρίζες και η ο απόλυτη τιμή είναι όλες τους συενχείς σε κάθε x_0 στο πεδίο ορισμού τους. Επίσης, πέρα από τον παραπάνω ορισμό της συνέχεια, ο οποίος αναφέρεται σε ένα *σημείο* της γραφικής παράστασης της f, έχουμε και τους δύο ακόλουθους ορισμούς που απλώς γενικεύουν την έννοια της συνέχειας σε ανοικτά και κλειστά διαστήματα[2]:

Ορισμός 3.2: Συνέχεια σε ανοικτό διάστημα

Αν $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, τότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο (a, b) αν για κάθε $x_0 \in (a, b)$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ορισμός 3.3: Συνέχεια σε κλειστό διάστημα

Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, τότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, αν είναι συνεχής στο (a, b) και ισχύουν επίσης:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

3.1.2 Άρα οι συνεχείς συναρτήσεις είναι αυτές που η γραφική τους παράσταση σχεδιάζεται μονοκοντυλιά[3], ε;

Από τα παραπάνω και το παράδειγμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης π μπορεί κανείς, εύλογα, να υποθέσει ότι οι γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων είναι αυτές για τις οποίες, κατά τη χάραξή τους, δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί, δηλαδή αυτές που δεν κάνουν «πηδηματάκια». Για παράδειγμα, αν πάρουμε την παρακάτω συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} & x > 0 \end{cases}$$

αυτή είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ επειδή τα όριά τους εκεί είναι εύκολο να υπολογιστούν, αλλά στο 0 πρέπει να κάνουμε λίγη παρπάνω δουλίτσα. Αρχικά, υπολογίζουμε το $f(0)$:

$$f(0) = 0.$$

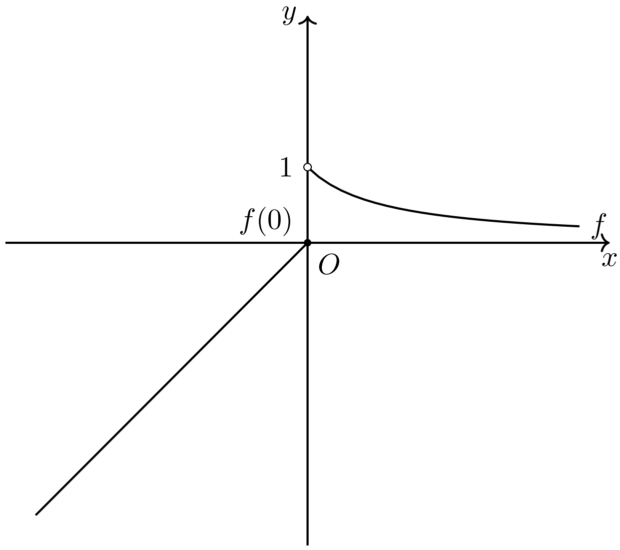
Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το όριο της f στο 0, χρησιμοποιώντας πλευρικά όρια, μιας και η f ορίζεται διαφορετικά γύρω από το 0. Έτσι, έχουμε:

$$\lim_{x \to^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0,$$

[2]Η αλήθεια είναι ότι απλώς είναι βολικοί οι παραπάνω ορισμοί στις περιπτώσεις που γνωρίζουμε το όριο μίας συνάρτησης σε ένα ολόκληρο διάστημα.

[3]Μονοκοντυλιά σημαίνει ότι μπορούμε να ξεκινήσουμε να σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση και να την ολοκληρώσουμε χωρίς να χρειαστεί να σηκώσουμε το μολύβι μας από το χαρτί.

και
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0+1} = 1,$$
επομένως, το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει, αφού τα πλευρικά διαφέρουν, άρα, εξ ορισμού, η f δεν είναι συνεχής στο 0. Αυτό, με βάση τα όσα είπαμε προηγουμένως, συμφωνεί με την εικόνα του «πηδηματακίου» της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.3.



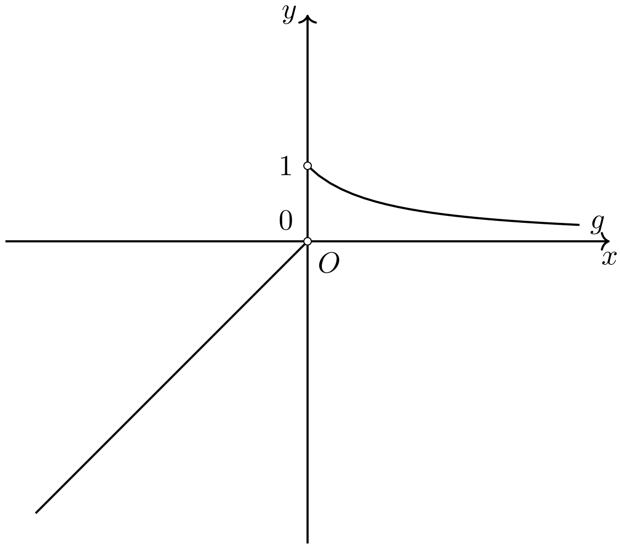
Σχήμα 3.3: Η γραφική παράσταση της f, με το «πηδηματάκι».

Όλα αυτά, συνηγορούν στην ιδέα ότι οι γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων μπορούν να σχεδιαστούν μονοκοντυλιά. Αλλά,για να κάνουμε τη ζωή μας πιο δύσκολη, ας πάρουμε την παρακάτω συνάρτηση:
$$g(x) = \begin{cases} x & x<0 \\ \dfrac{1}{x+1} & x>0 \end{cases}$$
Τι διαφορά έχει αυτή από την προηγούμενη; Για να δούμε και τη γραφική της παράσταση, όπως αυτή φαίνεται στο σχήμα 3.4.

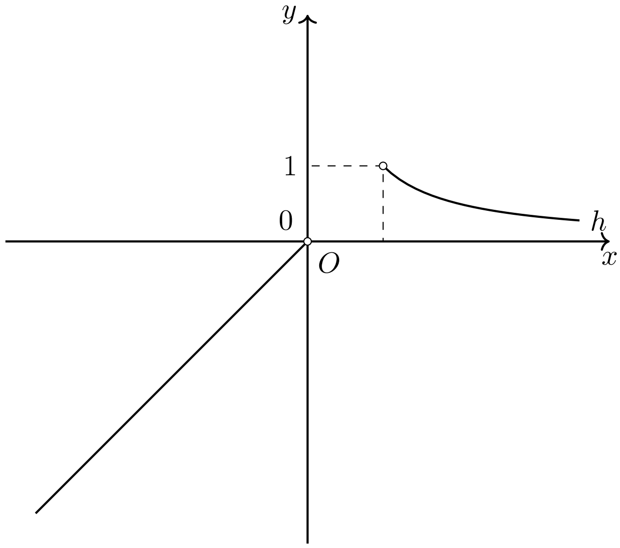
Εδώ τα πράγματα είναι σκούρα. Όπως και πριν, το όριο της f δεν υπάρχει στο 0, αλλά, εδώ, δεν υπάρχει και το $f(0)$, οπότε, τι κάνουμε; Για πάμε να συμβουλευτούμε τον ορισμό... Εκεί λέει πώς για να πούμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, πρέπει το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της ($x_0 \in A$, όπως λέει ο ορισμός). Στην περίπτωσή μας, το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, το οποίο είναι το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, επομένως, *δεν έχει νόημα* να εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο 0. Για να γίνει αυτό πιο σαφές, ας πάρουμε τη συνάρτηση h, με:
$$h(x) = \begin{cases} x & x<0 \\ \frac{1}{x} & x>1 \end{cases}$$
της οποίας τη γραφική παράσταση μπορούμε να δούμε στο σχήμα 3.5.

Η h είναι και αυτή συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, που είναι το $(\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, αφού στο $[0, 1]$, που φαίνεται να κάνει ένα «διαγώνιο πηδηματάκι», δεν ορίζεται, άρα δεν έχει νόημα να μιλάμε για τη συνέχειά της εκεί. Είναι, θα λέγαμε, σαν το «σύμπαν», ο κόσμος μέσα στον οποίο «ζει» η συνάρτηση, να είναι τα πάντα εκτός του διαστήματος $[0, 1]$. Σκεφτείτε το μυαλό του μέσου Ευρωπαίου εμπόρου πριν την ανακάλυψη της Αμερικής το 1492 από τον Χριστόφορο Κολόμβο[4].

[4]Ας δεχθούμε ότι ούτε οι Βίκινγκς, ούτε οι αρχαίοι Έλληνες, ούτε οι Αιγύπτιοι ούτε οι κάτοικοι της Ατλαντίδας ούτε κανένας άλλος είχε φτάσει στην Αμερική, τουλάχιστον όχι πριν τον Χριστόφορο Κολόμβο.



Σχήμα 3.4: Η γραφική παράσταση της g.

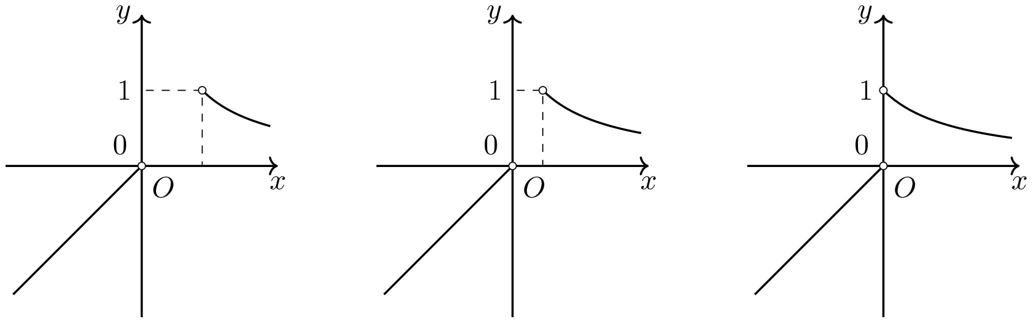


Σχήμα 3.5: Η γραφική παράσταση της h.

Τότε, αν κανείς δεχόταν ότι η Γη είναι σφαιρική, θα θεωρούσε ότι μπορεί να φτάσει από την Ευρώπη στην Άπω Ανατολή (Ινδοκίνα, Κίνα κ.λπ.) ταξιδεύοντας προς τα δυτικά *συνεχώς* και χωρίς καμμία διακοπή. Δηλαδή, αγνοούσε ένα κομμάτι του κόσμο που ένας εξωτερικός παρατηρητής θα έβλεπε και πίστευε ότι μπορούσε να πάει με μία *συνεχή* πορεία μέσα στη θάλασσα και να φτάσει από το δυτικό άκρο της Ευρώπης στο ανατολικό άκρο της Ασίας. Ε, αυτό όμως, ήταν ένα ψέμα. Έτσι και στην περίπτωσή μας, ο κόσμος της h είναι μόνο το $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, χωρίς να περιλαμβάνει την Αμερική, δηλαδή το $[0, 1]$, επομένως, υπό αυτήν την έννοια, η συνάρτηση h είναι συνεχής *στο πεδίο ορισμού της*. Για την ακρίβεια, όλες οι συναρτήσει που απεικονίζονται στο σχήμα 3.6 είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Επομένως, αυτό που φαίνεται να είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε μία συνεχής συνάρτηση να έχει γραφική παράσταση που να σχεδιάζεται μονοκοντυλιά είναι το πεδίο ορισμού της να είναι διάστημα. Πράγματι, αν και μία τυπική απόδειξη ξεφεύγει από τα πλαίσια της ύλης μας[5], αυτή είναι

[5]Αυτό που, πρακτικά, βρίσκεται πίσω από όλη αυτήν τη συζήτηση είναι η έννοια της *συνεκτικότητας*. Ένα σύνολο, στα μαθηματικά, λέγεται συνεκτικό αν δεν μπορεί να χωριστεί σε δύο ξεχωριστά κομμάτια ο αυστηρός ορισμός δεν



(α΄) Κοντά... (β΄) Πιο κοντά... (γ΄) Πιο κοντά δεν πάει!

Σχήμα 3.6: Όλες τους είναι συνεχείς.

και η αλήθεια. Με άλλα λόγια,

> «Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης που είναι ορισμένη σε ένα διάστημα (ανοικτό ή κλειστό, δεν μας απασχολεί) έχει γραφική παράσταση η οποία μπορεί να σχεδιαστεί χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι μας από το χαρτί».

Περισσότερα για τη γραφική παράσταση συνεχών συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε διαστήματα θα δούμε σε επόμενες ενότητες.

3.1.3 Πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων

Πριν προχωρήσουμε, ας δούμε λίγο πώς συμπεριφέρεται η συνέχεια μίας συνάρτησης σε σχέση με τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων που έχουμε ορίσει. Δεδομένου ότι ο ορισμός της συνέχειας βασίζεται στην έννοια του ορίου, αναμένουμε οι συνεχείς συναρτήσεις να έχουν «καλή» συμπεριφορά ως προς τις πράξεις, υπό την έννοια ότι το άθροισμα,η διαφορά, το πηλίκο κ.λπ. δύο συνεχών συναρτήσεων αναμένουμε να είναι μία συνεχής συνάρτηση. Πράγματι, τα αποτελέσματα εδώ ανταποκρίνονται στις προσδοκίες μας.

Πρόταση 3.1: Άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

Αν $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $x_0 \in A$, τότε και το άθροισμά τους, $f + g$ είναι συνεχής συνάρτηση στο x_0.

Απόδειξη. Αφού οι f και g είναι συνεχείς στο x_0, από τον ορισμό της συνέχειας έχουμε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ και } \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0),$$

επομένως, αφού τα δύο όρια υπάρχουν, θα υπάρχει και το όριο του αθροίσματός τους και μάλιστα θα ισχύει:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) &= \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = \\ &= (f+g)(x_0),\end{aligned}$$

μας απασχολεί, προφανώς). Έτσι, αυτό που είπαμε ως τώρα είναι κάτι που μεταφράζεται σε πιο μαθηματικούς όρους ως εξής:

> «Η γραφική παράσταση μίας συνεχούς συνάρτησης είναι συνεκτική αν (και μόνο αν) και το πεδίο ορισμού της είναι συνεκτικό».

Δηλαδή, αν δεν μπορούμε να χωρίσουμε το πεδίο ορισμού σε δύο ξεχωριστά κομμάτια, τότε δεν μπορούμε να χωρίσουμε ούτε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε δύο ξεχωριστά κομμάτια, πάντα υπό την προϋπόθεση ότι αυτή είναι συνεχής.

οπότε η συνάρτηση $f+g$ είναι συνεχής στο x_0.

□

Ανάλογα, έχουμε και τα ακόλουθα αποτελέσματα, για τις υπόλοιπες πράξεις μεταξύ συναρτήσεων.

Πρόταση 3.2: Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Αν[α΄] $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $x_0 \in A$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε η λf είναι συνεχής συνάρτηση στο x_0.

[α΄] Βαθμωτό πολλαπλασιασμό λέμε εκείνο το γινόμενο που δεν είναι μεταξύ μίας συνάρτησης και μίας άλλης συνάρτησης, αλλά μεταξύ ενός αριθμού και μιας συνάρτησης.

Απόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, από τον ορισμό της συνέχειας έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

επομένως, αφού το όριο υπάρχει, θα υπάρχει και το όριο του βαθμωτού γινομένου λf:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(\lambda f)(x) &= \lim_{x\to x_0}\lambda f(x) = \lambda\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda f(x_0) = \\ &= (\lambda f)(x_0),\end{aligned}$$

οπότε η συνάρτηση λf είναι συνεχής στο x_0.

□

Πρόταση 3.3: Γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

Αν $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $x_0 \in A$, τότε και το γινόμενό τους, $f \cdot g$ είναι συνεχής συνάρτηση στο x_0.

Απόδειξη. Αφού οι f και g είναι συνεχείς στο x_0, από τον ορισμό της συνέχειας έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ και } \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0),$$

επομένως, αφού τα δύο όρια υπάρχουν, θα υπάρχει και το όριο του γινομένου τους και μάλιστα θα ισχύει:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) = \\ &= (f\cdot g)(x_0),\end{aligned}$$

οπότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι συνεχής στο x_0.

□

Πόρισμα 3.1: Δυνάμεις συνεχούς συνάρτησης

Από το παραπάνω, εύκολα έπεται ότι αν μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, τότε και οποιαδήποτε δύναμή της, f^ν είναι συνεχής στο x_0, αφού, για $\nu = 2$ είναι προφανές, δεδομένου ότι $f^2 = f \cdot f$ και για $\nu = 3$, $f^3 = f \cdot f^2$ και για μεγαλύτερα ν συνεχίζουμε ομοίως ($f^\nu = f^{\nu-1}$).

Πρόταση 3.4: Πηλίκο συνεχών συναρτήσεων

Αν $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $x_0 \in A$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε και το πηλίκο τους, $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο x_0.

Απόδειξη. Αφού οι f και g είναι συνεχείς στο x_0, από τον ορισμό της συνέχειας έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ και } \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0,$$

επομένως, αφού τα δύο όρια υπάρχουν, θα υπάρχει και το όριο του αθροίσματός τους και μάλιστα θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \\ = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0),$$

οπότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0.

□

Σε ό,τι αφορά τη σύνθεση δύο συναρτήσεων, έχουμε το εξής αποτέλεσμα, που θυμίζει έντονα ένα ανάλογο αποτέλεσμα για τα όρια σύνθετων συναρτήσεων (για λόγους απλότητας και συνέπειας, παραθέτουμε και το παρακάτω αποτέλεσμα χωρίς απόδειξη).

Πρόταση 3.5: Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις με την f να είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και την g να είναι συνεχής στο $f(x_0) \in B$, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$.

Από όλα τα παραπάνω μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι όλες οι βασικές συναρτήσεις είναι συνεχείς σε όλο το πεδίο ορισμού τους, πράγμα που μπορούμε να χρησιμοποιούμε, πλέον, άνευ απόδειξης.

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα, για να διαφωτιστούμε[6]:
Παράδειγμα 3.1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x}{x^2-2x} & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases}$$

ως προς τη συνέχεια.

Αρχικά, η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων[7]. Το μόνο που μας έμεινε να εξετάσουμε είναι το 0. Εύκολα παρατηρούμε ότι:

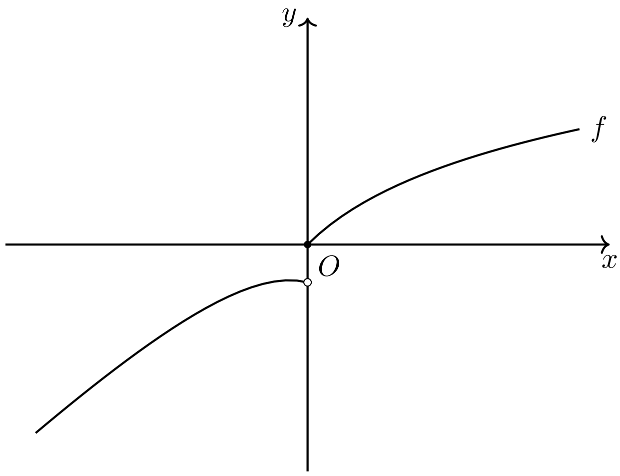
$$f(0) = \ln(1+0) = 0,$$

ενώ, για το όριό της στο 0 βλέπουμε ότι πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια αφού η f ορίζεται διαφορετικά γύρω από το 0. Έτσι, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x) = \ln 1 = 0$$

και:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x}{x^2-2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x^2+1)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x-2} = \\ = -\frac{1}{2},$$



Σχήμα 3.7: Η γραφική παράσταση της f.

επομένως, το όριο της f στο 0 δεν υπάρχει, άρα η f δεν είναι συνεχής στο 0. Αυτό γίνεται εμφανές και από τη γραφική παράσταση της f, όπως αυτή φαίνεται στο σχήμα 3.7.

□

3.2 Βασικά αποτελέσματα για συνεχείς συναρτήσεις

Η συνέχεια, όπως είδαμε, είναι μία κομβική ιδιότητα των συναρτήσεων καθώς, βασιζόμενη στην ιδέα του ορίου, προχωράει ένα βήμα παραπέρα, δίνοντάς μας μία πληρέστερη εικόνα για τη συμπεριφορά της συνάρτησης σε ένα σημείο. Ειδικότερα, είδαμε ότι για μία συνεχή συνάρτηση, έχουμε άμεσα δύο πολύ σημνατικές πληροφορίες:

- το όριό της υπάρχει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της[8] και
- τα όριά της σε κάθε σημείο καθορίζονται πλήρως από την τιμή της συνάρτησης σε αυτό το σημείο.

Πέρα όμως από αυτά, έχουμε και άλλα, και μάλιστα πολλά, σημαντικά θεωρήματα που αφορούν συνεχείς συναρτήσεις, ιδιαίτερα όταν αυτές είναι ορισμένες σε κλειστά διαστήματα (θα δούμε στην πορεία αυτού του κεφαλαίου τη σημασία που έχει το κλειστό διάστημα σε αυτά τα θεωρήματα). Θα δούμε τώρα τα βασικότερα εξ αυτών.

3.2.1 Τοπική συμπεριφορά συνάρτησης

Ας υποθέσουμε ότι μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in A$ και μάλιστα ισχύει ότι $f(x_0) > 0$ σε εκείνο το σημείο, δηλαδή η f είναι θετική σε εκείνο το σημείο. Αν σκεφτούμε, εντελώς διαισθητικά, τι σημαίνει η συνέχεια, μπορούμε να καταλήξουμε στο εξής συμπέρασμα:

«Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, τότε θα ισχύει και ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > 0,$$

[6] Τόσος διαφωτισμός που έχει πέσει σε αυτές τις σημειώσεις, ούτε ο Βολταίρος να τις είχε γράψει...

[7] Γενικά, δε χρειάζεται να κάτσουμε να αναλύσουμε ποιες πράξεις και μεταξύ ποιων συναρτήσεων μας δίνουν τους εν λόγω τύπους, αλλά είναι καλό να μπορούμε να το κάνουμε και μόνοι μας.

[8] Ήδη αυτό μας εξασφαλίζει κάποιες καλές ιδιότητες που όμως δε θα μας απασχολήσουν σε αυτό το μάθημα.

δηλαδή, το όριο της συνάρτησης στο x_0 είναι θετικό. Γνωρίζουμε όμως ότι αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι κι αυτή θετική για x κοντά στο x_0».

Έτσι, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 3.6: Τοπική συμπεριφορά συνέχειας

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και $x_0 \in A$ στο οποίο η f είναι συνεχής με $f(x_0) > 0$ τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_0.

Εντελώς ανάλογα παίρνουμε και το ακόλουθο πόρισμα:

Πρόταση 3.7: Τοπική συμπεριφορά συνέχειας

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση και $x_0 \in A$ στο οποίο η f είναι συνεχής με $f(x_0) < 0$ τότε $f(x) < 0$ για x κοντά στο x_0.

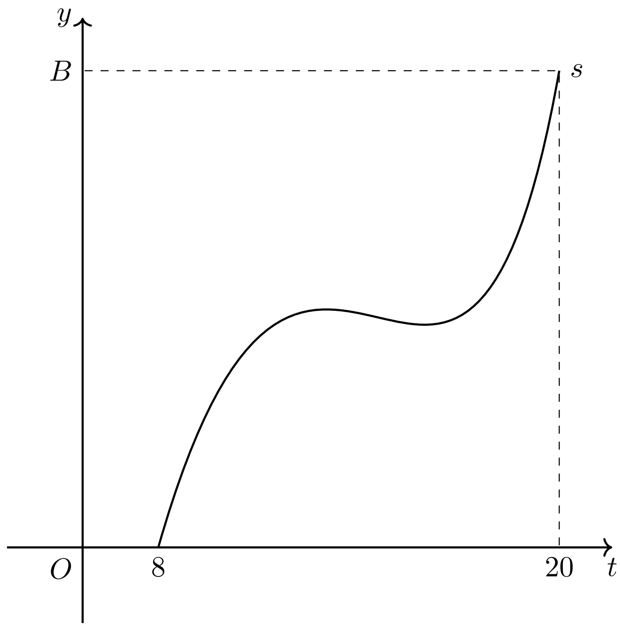
3.2.2 Το θεώρημα του Bolzano

Ας πάρουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

> Ένας μοναχός αποφασίζει να ανέβει σε ένα μοναστήρι που βρίσκεται πολύ ψηλά σε ένα βουνό. Το Σάββατο το πρωί, ακριβώς στις 8, ξεκινά από τους πρόποδες του βουνού να ανέβει το μοναδικό μονοπάτι που οδηγεί στο μοναστήρι. Η διαδρομή είναι, προφανώς, ανηφορική, πράγμα που κουράζει συχνά τον μοναχό μας, ο οποίος πραγματοποιεί διάφορες στάσεις και αλλαγές στον ρυθμό με τον οποίο περπατάει. Σε ένα σημείο μάλιστα, θυμάται ότι ξέχασε να πάρει κάποια πράγματα που είχε αφήσει πιο πίσω του και γυρίζει να τα πάρει. Μετά από όλην αυτήν την ταλαιπωρία, φτάνει τελικά στο μοναστήρι ακριβώς στις 8 το βράδυ της ίδιας μέρας. Εκεί στο μοναστήρι κάθεται μία ολόκληρη εβδομάδα και, το Σάββατο στις 8 το πρωί ακριβώς, αποφασίζει να ξεκινήσει την κατάβασή του. Για να μην τα πολυλογούμε, ο μοναχός, μετά από διάφορες περιπέτειες και απρόοπτα, χωρίς όμως, και πάλι, να παρεκκλίνει από το μονοπάτι του, καταφέρνει να φτάσει στο σημείο από το οποίο είχε ξεκινήσει, στους πρόποδες του βουνού, ακριβώς στις 8 το βράδυ του Σαββάτου. Εκεί, σας συναντά ο μοναχός και σας λέει: «Ήταν μία στιγμή της ημέρας που, και κατά την ανάβαση και κατά την κατάβαση, βρισκόμουν ακριβώς στην ίδια θέση». Πώς είναι τόσο βέβαιος;

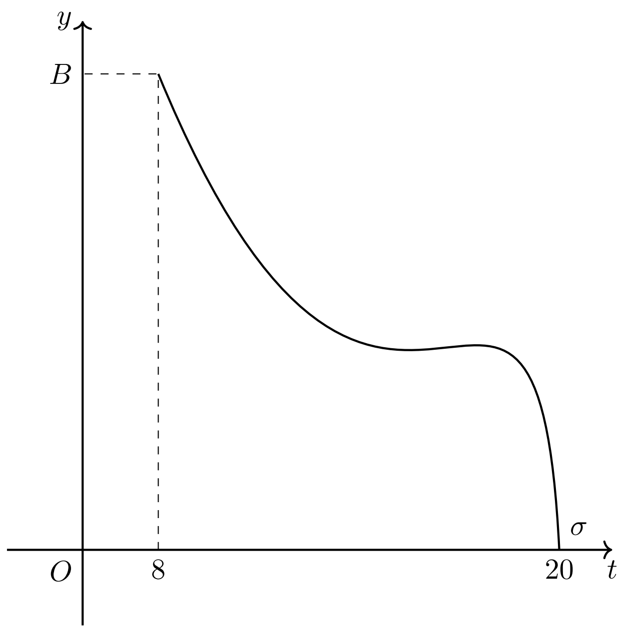
Ωραία, μόλις το χάσαμε, αρχίσαμε να παραμιλάμε τώρα. Πράγματι, πώς ήταν τόσο σίγουρος ο μοναχός για το ότι υπήρχε μια στιγμή κατά την οποία, και στο «ανέβα» και στο «κατέβα» βρισκόταν ακριβώς στην ίδια θέση; Ας προσπαθήσουμε λίγο να σκεφτούμε, αρχικά, διαισθητικά. Φανταστείτε τη συνάρτηση θέσης του μοναχού κατά την ανάβαση, έστω $s(t)$, με τον χρόνο $t \in [8, 20]$, δηλαδή ο χρόνος τρέχει από τις 8 το πρωί μέχρι τις 8 (20) το βράδυ. Αναλόγως, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση θέσης κατά την κατάβαση $\sigma(t)$ με τον χρόνο να παίζει πάλι ανάμεσα στις το πρωί και τις το βράδυ, δηλαδή $t \in [8, 20]$. Τώρα, ας προσπαθήσουμε να φανταστούμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων. Αρχικά, ο μοναχός ξεκινάει από τη θέση $A = 0$ και φτάνει, τελικά, στη θέση $B > 0$ που βρίσκεται κάποια χιλιόμετρα μακριά από τη θέση A, οπότε, η γραφική παράσταση της s θα είναι μία καμπύλη που ξεκινά από το σημείο $(8, 0)$ (στις το πρωί είναι στη θέση 0) και θα καταλήγει στο σημείο $(20, B)$ (στις 8 το βράδυ φτάνει στη θέση B). Για παράδειγμα, θα μπορούσε να είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα 3.8 (το 8 ήρθε λίγο πιο κοντά στο 0 από ότι έπρεπε, για λόγους οικονομίας χώρου).

Και τώρα αρχίζουν και εγείρονται τα πρώτα ερωτήματα: Με ποιο δικαίωμα, κύριέ μου, τολμήσατε και σχεδιάσατε τη γραφική παράσταση της s σαν να ήταν μία συνεχής συνάρτηση; «Πάταξον μεν,



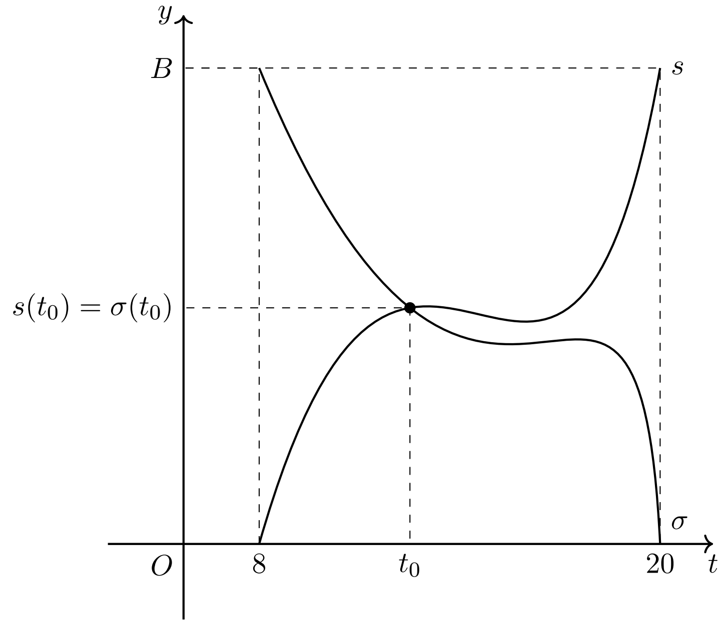
Σχήμα 3.8: Η άνοδος του μοναχού.

άκουσον δε» θα έλεγε ο Θεμιστοκλής σε αυτήν την περίπτωση, οπότε, γιατί όχι, κι εμείς αυτό θα πούμε. Η s είναι η συνάρτηση θέσης-χρόνου του μοναχού, δηλαδή αναπαριστά τη θέση του μοναχού κάθε χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια της κίνησής του. Αν υποθέσουμε ότι ο μοναχός μας είναι άνθρωπος σαν όλους εμάς, τότε εύκολα θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι δεν έχει ανακαλύψει κάποιον τρόπο για να τηλεμεταφέρεται ή να διακτινίζεται ή να αλλάζει, τέλος πάντων, θέση με τρόπο *ασυνεχή*. Επομένως, μάλλον καλά κάναμε και σχεδιάσαμε τη γραφική παράσταση της s ως μία συνεχή καμπύλη. Με όμοιο τρόπο, δε θα δυσκολευτεί κανείς να σχεδιάσει και τη γραφική παράσταση της σ, και πάλι υποθέτοντας ότι αυτή είναι συνεχής, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.9.



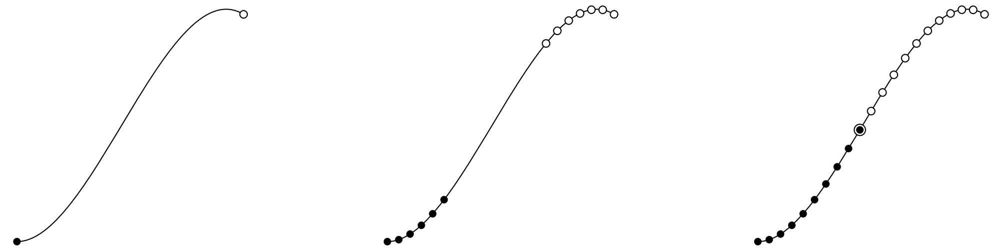
Σχήμα 3.9: Η κάθοδος του μοναχού.

Τώρα, τι πάει να πει ο ισχυρισμός του μοναχού ότι «Ήταν μία στιγμή της ημέρας που, και κατά την ανάβαση και κατά την κατάβαση, βρισκόμουν ακριβώς στην ίδια θέση»; Ας σκεφτούμε λίγο: οι s και σ είναι οι θέσεις του μοναχού ως συναρτήσεις του χρόνου κατά την ανάβαση και κατά την ακτάβαση αντίστοιχα. Επομένως, για να βρίσκεται στην ίδια θέση την ίδια χρονική στιγμή μέσα στη μέρα, πρέπει οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων να «συναντιούνται» σε ένα σημείο (να τέμνονται, δηλαδή). Ας πάρουμε τις δύο γραφικές παραστάσεις και ας τις σχεδιάσουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων, για να δούμε αν τέμνονται, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.10.



Σχήμα 3.10: Το ανεβοκατέβασμα του μοναχού.

Είναι εμφανές, στην προκειμένη περίπτωση, ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται οπότε, πράγματι, ο μοναχός είχε δίκιο. Αν θέλουμε, πιο διαισθητικά, μπορούμε να φανταστούμε ότι η λύση του προβλήματος προκύπτει ως εξής: την ίδια στιγμή που ο μοναχός ξεκινά να ανεβαίνει το βουνό, φανταστείτε έναν άλλο μοναχό, τον «μελλοντικό» μοναχό που θα ξεκινήσει να κατεβαίνει το επόμενο Σάββατο, να ξεκινάει την ίδια στιγμή να κατεβαίνει. Τότε, όπως είναι αναμενόμενο, αφού δεν υπάρχει άλλο μονοπάτι για το μοναστήρι, αυτοί οι δύο μοναχοί θα συναντηθούν σε ένα σημείο, το οποίο είναι και το σημείο που ψάχναμε. Σχηματικά, μπορείτε να δείτε αυτήν την πορεία στο σχήμα 3.11, όπου το μαύρο κυκλάκι είναι ο μοναχός που ανεβαίνει και το άσπρο κυκλάκι είναι ο μοναχός που κατεβαίνει πάνω στο μονοπάτι που συνδέει το μοναστήρι με τους πρόποδες του βουνού.

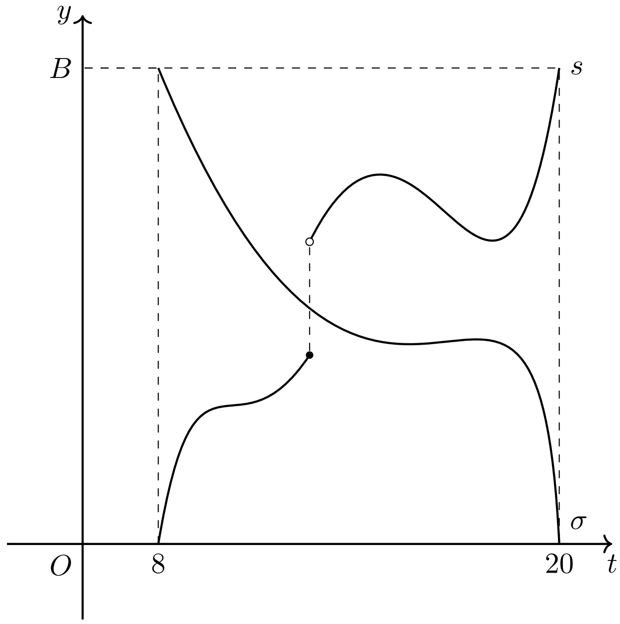


(α΄) Ώρα Ελλάδος 8 π.μ. (β΄) Ώρα Ελλάδος 10 π.μ. (γ΄) Ώρα Ελλάδος t_0.

Σχήμα 3.11: Η σύγκρουση των δύο μοναχών[9].

[9] Οι λεζάντες των σχημάτων που αφορούν το πρόβλημα με τον μοναχό (η άνοδος, η κάθοδος κ.λπ.) θα μπορούσαν να είναι τίτλοι από σειρά θρησκευτικών δραμάτων/θρίλερ του Χόλλυγουντ.

Ας δούμε τώρα τι ήταν αυτό που μας επέτρεψε να επαληθεύσουμε την αλήθεια της πρότασης του μοναχού. Το βασικότερο ίσως στοιχείο που μας βοήθησε ήταν η *συνέχεια* των συναρτήσεων s και σ. Πράγματι, φανταστείτε αυτές να ήταν ασυνεχείς, έστω και μία εξ αυτών, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.12. Τότε, όπως είναι σαφές, δεδομένου ότι κατά την ανάβασή του ο μοναχός τηλεμεταφέρεται σε ένα άλλο μέρος του μονοπατιού, ο ισχυρισμός του ότι βρισκόταν στο ίδιο μέρος την ίδια στιγμή δεν μπορεί να αληθεύει.



Σχήμα 3.12: Η τηλεμεταφορά του μοναχού.

Αν προσπαθήσουμε να δούμε το πρόβλημα αυτό λίγο πιο αφηρημένα, παρατηρούμε ότι αυτό που επί της ουσίας αναζητούμε είναι μια χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε να ισχύει:

$$s(t_0) = \sigma(t_0),$$

ή, με άλλα λόγια:

$$s(t_0) - \sigma(t_0) = 0,$$

ή, εναλλακτικά, ζητάμε η εξίσωση:

$$s(t) - \sigma(t) = 0,$$

να έχει κάποια λύση στο διάστημα $[8, 20]$, ή, για να ακριβολογούμε, στο $(8, 20)$, μιας και ο μοναχός στην αρχή της ανάβασης και της κατάβασης είναι, σίγουρα, σε διαφορετικά σημεία. Προχωρώντας λίγο ακόμα, αν θέσουμε $f(t) = s(t) - \sigma(t)$, τότε, αυτό που θέλουμε να δείξουμε έτσι ώστε να αληθεύει ο ισχυρισμός του μοναχού είναι ότι η εξίσωση:

$$f(t) = 0,$$

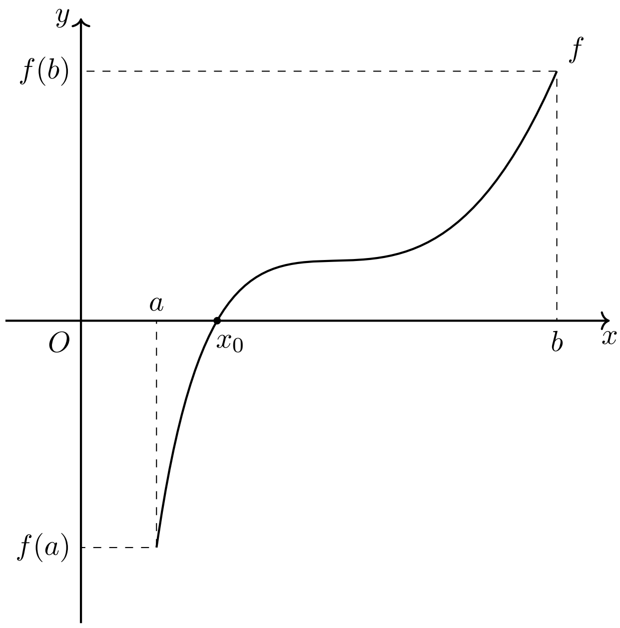
έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(8, 20)$, δηλαδή ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(8, 20)$. Σε αυτήν μας την αναζήτηση, όπως είδαμε, κομβικό ρόλο έπαιξε η συνέχεια της f — παρατηρείστε ότι η f είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Το επόμενο θεώρημα, το οποίο ανήκει σε έναν Βοημό[10] μοναχό, τον Bernard Bolzano, θα μας διαφωτίσει αρκετά.

[10] Η Βοημία βρισκόταν εκεί που βρίσκεται η σημερινή Τσεχία.

Θεώρημα 3.1: Bolzano

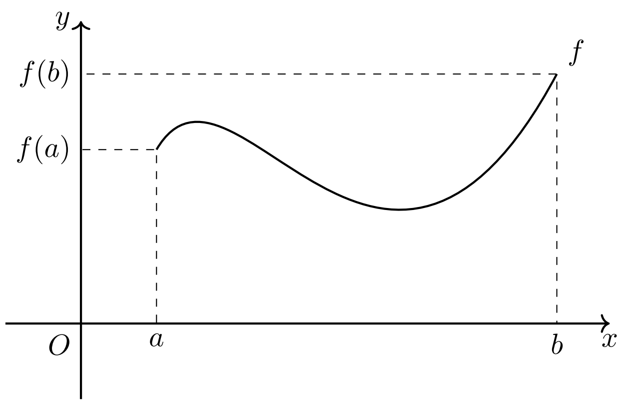
Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση η οποία παίρνει στα a και b ετερόσημες τιμές, δηλαδή $f(a)f(b) < 0$. Τότε υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε το x_0 να είναι ρίζα της f, δηλαδή
$$f(x_0) = 0.$$

Εποπτικά, αυτό σημαίνει ότι αν η συνάρτηση f, για παράδειγμα, ξεκινά από ένα σημείο κάτω από τον άξονα $x'x$ και καταλήγει σε ένα άλλο σημείο, πάνω από τον άξονα $x'x$ τότε, αν είναι και συνεχής, πρέπει να περνά και από τον άξονα $x'x$. Ε, εντάξει, αυτό ήταν τουλάχιστον προφανές, όπως βλέπετε στο σχήμα 3.13.



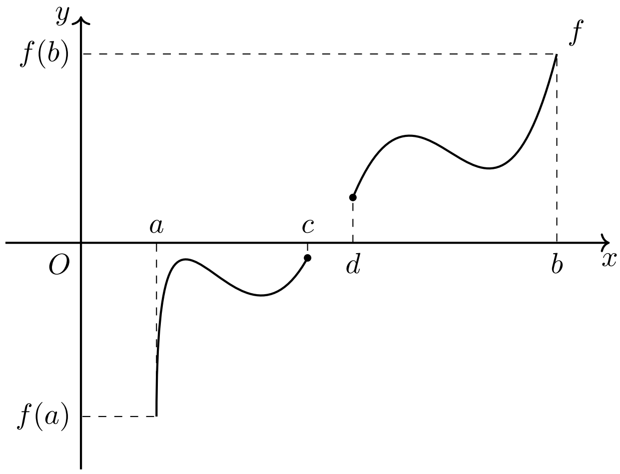
Σχήμα 3.13: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Bolzano.

Αρχικά, όπως είδαμε και στο παράδειγμα με τον μοναχό, η συνέχεια της συνάρτησης είναι απολύτως απαραίτητα, αφού, σε περίπτωση που η f δεν είναι συνεχής, ενδέχεται να έχουμε ένα «πηδηματάκι» και, ως εκ τούτου, η f να «υπερπηδά» τον άξονα $x'x$. Επίσης, η απαίτηση η f να είναι θετική στο a και αρνητική στο b ή αρνητική στο a και θετική στο b είναι επίσης απαραίτητα, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.14.



Σχήμα 3.14: Η αναγκαιότητα της υπόθεσης $f(a)f(b) < 0$.

Τέλος, είναι σαφές ότι το πεδίο ορισμού της f πρέπει να είναι διάστημα, δεδομένου ότι, αν δεν ήταν, θα μπορούσαμε να είχαμε μία κατάσταση σαν αυτή που φαίνεται στο σχήμα 3.15.



Σχήμα 3.15: Η αναγκαιότητα της υπόθεσης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Επομένως, όλες οι υποθέσεις που αναφέρονται στο θεώρημα του Bolzano είναι, αυτό που λέμε,*ικανές* συνθήκες έτσι ώστε η f να έχει ρίζα στο (a, b), χωρίς όμως να είναι αναγκαίες. Δηλαδή, μπορεί να έχει μία συνάρτηση ρίζα σε ένα διάστημα χωρίς να ικανοποιεί καμμία από τις συνθήκες του θεωρήματος Bolzano σε αυτό[11], πράγμα που σημαίνει ότι δεν ισχύει κανενός είδος αντίστροφο του θεωρήματος. Δηλαδή, αν μία συνάρτηση έχει ρίζα σε ένα διάστημα δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τίποτα περισσότερο από αυτό.

Ας δούμε κι ένα παράδειγμα, στο οποίο το θεώρημα του Bolzano μας λύνει τα χέρια ως προς το αν μία παράξενη εξίσωση έχει λύση ή όχι (προφανώς, δε μας λέει *ποια* είναι η λύση, απλώς ότι *υπάρχει*).
Παράδειγμα 3.2. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$e^{x-1} - (x-2)\ln(x+1) = x^2,$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(-1, +\infty)$.

Αρχικά, ξαναγράφουμε τη δοσμένη εξίσωση με όλους τους όρους της στο πρώτο μέλος:

$$e^{x-1} - (x-2)\ln(x+1) - x^2 = 0,$$

και, θεωρώντας τη συνάρτηση

$$f(x) = e^{x-1} - (x-2)\ln(x+1) - x^2,$$

βλέπουμε ότι το ζητούμενο ισοδυναμεί με το να δείξουμε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Τώρα, η f είναι συνεχής στο $(-1, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, επομένως μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε *κλειστό* υποδιάστημα του $(-1, +\infty)$ θέλουμε. Μετά από λίγο πειραματισμό, βλέπουμε ότι:

- $f(1) = e^0 - (1-2)\ln 2 - 1 = \ln 2 > 0$ και
- $f(2) = e - (2-2)\ln 2 - 4 = e - 4 < 0$,

οπότε, δεδομένου ότι η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, από το θεώρημα του Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2) \subseteq (-1, +\infty)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = 0,$$

[11] Μπορείτε να βρείτε τέτοια παραδείγματα;

άρα η δοσμένη εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση.

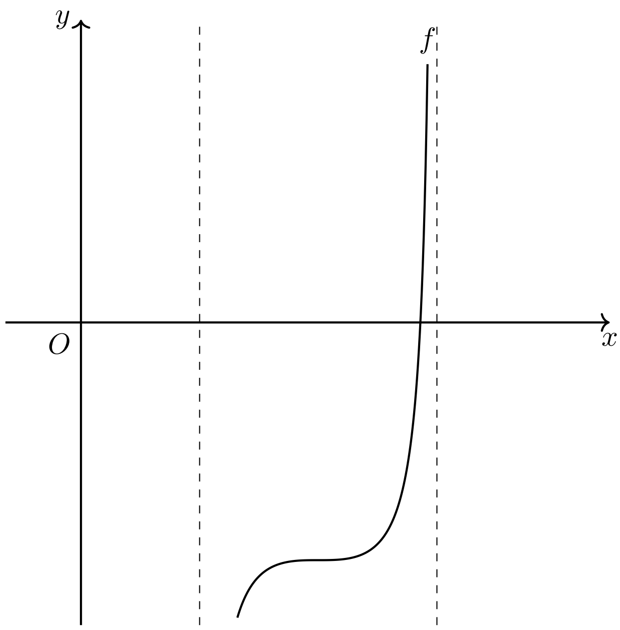
□

Πριν προχωρήσουμε παρκάτω στη μελέτη των βασικών συνεπειών του θεωρήματος του Bolzano, ας δούμε τι θα μπορούσε να γίνε στην περίπτωση που έχουμε μία συνεχή συνάρτηση σε ανοικτό διάστημα, για παράδειγμα την $f(x) = \text{εφ}\, x - x$ για $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, η οποία δεν μπορεί με κανέναν τρόπο να οριστεί και στα άκρα του διαστήματος έτσι ώστε να είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα. Αν πάρουμε τη γραφική της παράσταση, όπως αυτή φαίνεται στο σχήμα 3.16, παρατηρούμε ότι μπορεί να μην ορίζεται σε ένα κλιεστό διάστημα, όμως μπορούμε να κάνουμε το εξής τέχνασμα: τα όριά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της είναι:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (\text{εφ}\, x - x) = -\infty - \frac{\pi}{2} = -\infty,$$

και, ομοίως:

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} (\text{εφ}\, x - x) = +\infty - \frac{3\pi}{2} = +\infty.$$



Σχήμα 3.16: Η γραφική παράσταση της $f(x) = \text{εφ}\, x - x$.

Ας παρατηρήσουμε τώρα το εξής. Αφού:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty < 0,$$

γνωρίζουμε ότι η f θα είναι αρνητική για x κοντά στο $\frac{\pi}{2}$, με $x > \frac{\pi}{2}$, επομένως, ειδικότερα, υπάρχει ένας αριθμός $x_1 > \frac{\pi}{2}$, αρκετά κοντά στο $\frac{\pi}{2}$, τέτοιος ώστε $f(x_1) < 0$. Ανάλογα, δεδομένου ότι:

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} f(x) = +\infty > 0,$$

υπάρχει κι ένας ακόμας $x_2 < \frac{3\pi}{2}$, αρκετά κοντά στο $\frac{3\pi}{2}$, τέτοιος ώστε $f(x_2) > 0$. Έτσι, αφού μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_1 < x_2$, έχουμε ότι:

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων,
- $f(x_1) < 0$ και

- $f(x_2) > 0$,

επομένως, από το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = 0.$$

Επομένως, εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano και σε συνεχείς συναρτήσεις σε ανοικτά διαστήματα, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, υπό την πορϋπόθεση ότι:

$$\left(\lim_{x \to a^+} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to b^-} f(x)\right) < 0,$$

ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία.

3.2.3 Συνέπειες του Θεωρήματος Bolzano

Από το θεώρημα Bolzano προκύπτουν κάποιες ενδιαφέρουσες συνέπειες που, συνδυαστικά, μας δίνουν νέα ισχυρά εργαλεία για να μελετήσουμε τις συνεχείς συναρτήσεις ως προς διάφορα στοιχεία τους.

Πρόσημο συνάρτησης μεταξύ διαδοχικών ριζών της

Μία σημαντική συνέπεια του θεωρήματος Bolzano είναι το ότι, αν γνωρίζουμε ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και επίσης γνωρίζουμε και ακριβώς όλες τις ρίζες της, τότε μπορούμε, χρησιμοποιώντας μόνον μία τιμή της σε κάθε διάστημα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες της, να συμπεράνουμε το πρόσημό της εκεί. Αυτό διατυπώνεται πιο αυστηρά στην ακόλουθη:

Πρόταση 3.8: Σταθερού προσήμου

Αν $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε είτε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ είτε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι δεν ισχύει το ζητούμενο. Δηλαδή, ας υποθέσουμε ότι ούτε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ ούτε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε, αφ' ενός, έχουμε ότι υπάρχει ένα $x_1 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) \leq 0$ και, αφ' ετέρου, έχουμε ότι υπάρχει ένα $x_2 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) \geq 0$. Επιπρόσθετα, αφού $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, έπεται ότι $f(x_1) < 0$ και $f(x_2) > 0$. Δηλαδή, έχουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$):

- η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, αφού είναι συνεχής στο (a, b) και $[x_1, x_2] \subseteq (a, b)$,
- $f(x_1) < 0$ και
- $f(x_2) > 0$,

επομένως, από το θεώρημα του Bolzano έπεται ότι υπάρχει ένα $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, άτοπο, αφού $x_0 \in (a, b)$ και, από την υπόθεση $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ έπεται ότι $f(x_0) \neq 0$.

Επομένως, το ζητούμενο ισχύει.

□

Από το παραπάνω μπορούμε να πάρουμε το εξής

Πόρισμα 3.2: Σταθερού προσήμου

Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και $\rho_1 < \rho_2$ είναι δύο *διαδοχικές* ρίζες της f στο $[a, b]$ τότε η f διατηρεί πρόσημο στο (ρ_1, ρ_2), δηλαδή, είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$ είτε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$.

Απόδειξη. Αφού οι ρίζες της f είναι διαδοχικές, δηλαδή δεν υπάρχει άλλη ρίζα της f ανάμεσά τους, έπεται ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$, επομένως, από την προηγούμενη πρόταση, έπεται το ζητούμενο.

□

Ας δούμε, στο επόμενο παράδειγμα, πώς αυτό το πόρισμα βρίσκει εφαρμογή στη μελέτη του προσήμου μιας συνάρτησης.

Παράδειγμα 3.3. Αν $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2 + (f(x))^2 = 1$$

και, επιπρόσθετα, γνωρίζετε ότι $f(0) = 1$, να βρείτε τον τύπο της f.

Από τη δοσμένη σχέση παίρνουμε το εξής:

$$x^2 + (f(x))^2 = 1 \Leftrightarrow (f(x))^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{1 - x^2},$$

επομένως, έχουμε τον τύπο της $|f|$ και θέλουμε να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα για τον τύπο της f. Αν γνωρίζαμε το πρόσημο της f στο πεδίο ορισμού της τότε θα μπορούσαμε, αναλόγως, να «βγάλουμε» το απόλυτο και έτσι να καταλήξουμε στον τύπο της f. Εδώ θα μας φανείς χρήσιμο το παραπάνω πόρισμα. Παρατηρούμε ότι οι ρίζες της f είναι *ακριβώς* οι ρίζες της $|f|$, αφού, για κάθε αριθμό $y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$y = 0 \Leftrightarrow |y| = 0,$$

επομένως, αντίστοιχα έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0.$$

Από το παραπάνω όμως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$|f(x)| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1,$$

το οποίο ισοδυναμεί με το ότι:

$$x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Τελικά, έχουμε δείξει ότι οι ρίζες της f είναι ακριβώς οι 1, και -1, αφού δείξαμε ότι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Επομένως, αφού η f δεν έχει άλλες ρίζες, έπεται ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ και, δεδομένου ότι η f είναι και συνεχής, από το προηγούμενο πόρισμα παίρνουμε ότι είτε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ είτε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Αφού πρέπει να ισχύει αναγκαστικά ένα από τα δύο προηγούμενα και έχουμε ότι $f(0) = 1 > 0$, έπεται ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ και, γενικότερα, ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$, οπότε:

$$f(x) = |f(x)| = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1].$$

□

Γενικότερα, με την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να βρίσκουμε τον τύπο μίας συνεχούς συνάρτησης f αν γνωρίζουμε τον τύπο της $|f|$ και μπορούμε να προσδιορίσουμε ακριβώς όλες τις ρίζες της.

Το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (Θ.Ε.Τ.)

Ένα άλλο άμεσο πόρισμα του θεωρήματος Bolzano είναι το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (Θ.Ε.Τ.) το οποίο, πρακτικά, μας λέει ότι μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα, αν παίρνει την τιμή 5 και την τιμή -4 τότε θα πρέπει να παίρνει και όλες τις τιμές ανάμεσα στο -4 και το 5, θα πρέπει, δηλαδή, να περνάει από όλες τις ενδιάμεσες «στάθμες», μεταξύ το 5 και του -4. Αυτό, πιο τυπικά, μας δίνει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.2: Ενδιαμέσων Τιμών

Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση και $f(a) \neq f(b)$ τότε, για κάθε αριθμό c μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = c.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος θα γίνει με τη χρήση του θεωρήματος Bolzano[12]. Ας υποθέσουμε, για αρχή, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $f(a) < f(b)$, επομένως, ένα c ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(b)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(a) < c < f(b).$$

Αυτό που, ουσιαστικά, θέλουμε να δείξουμε είναι ότι η εξίσωση:

$$f(x) = c$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (a, b). Επομένως, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = f(x) - c.$$

Τότε, έχουμε:

- η g είναι συνεχής στο $[a, b]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, αφού η f είναι συνεχής,
- $g(a) = f(a) - c < 0$ και
- $g(b) = f(b) - c > 0$,

επομένως, από το θεώρημα Bolzano, έπεται ότι υπάρχει ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - c = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = c,$$

που ήταν το ζητούμενο.

□

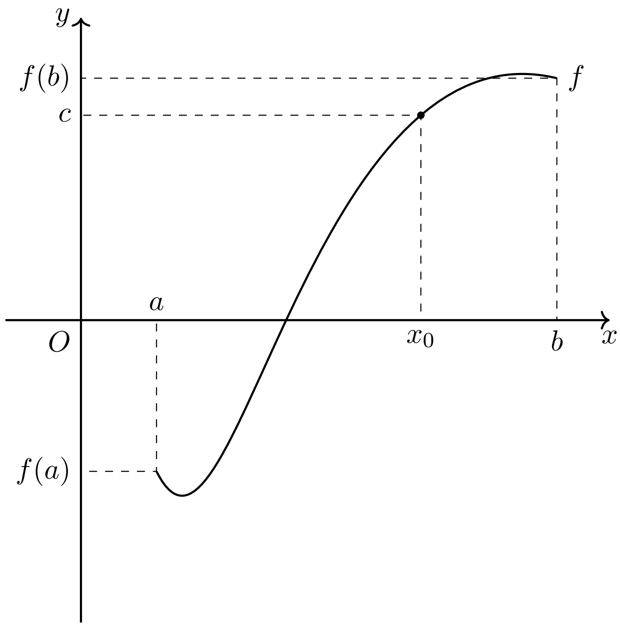
Εποπτικά, αυτό που μας λέει το Θ.Ε.Τ. φαίνεται στο σχήμα 3.17.

Το εν λόγω θεώρημα, ακριβώς επειδή η απόδειξή του είναι μία τυπική εφαρμογή του θεωρήματος του Bolzano, δε μας δίνει κάποια τρομερή δυνατότητα να λύσουμε προβλήματα που δεν μπορούμε με το ίδιο το θεώρημα του φορειγνλανγυαγεενγλισηΒολζανο, αφού, αρκεί να φέρουμε τα πάντα στο ένα μέλος μιας εξίσωσης και να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano αντί να κρατήσουμε τις σταθερές στο άλλο μέλος και να εφαρμόσουμε το Θ.Ε.Τ.. Παρ' όλα αυτά, μας δίνει μία πολύ ωραία πρόταση που μας βοηθά στον προσδιορισμό του συνόλου τιμών μίας συνάρτησης.

Πρόταση 3.9: Συνεχής εικόνα διαστήματος

Αν $f : \Delta \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση και το Δ είναι ένα διάστημα, τότε και το σύνολο τιμών της f, $f(\Delta)$, είναι ένα διάστημα.

[12] Αλλιώς, τι πόρισμα του θεωρήματος Bolzano θα ήταν;



Σχήμα 3.17: Η γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Ε.Τ.

Απόδειξη. Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη, ας σκεφτούμε λίγο τι πάει να πει διάστημα. Ένα διάστημα είναι ένα σύνολο που γράφεται στη μορφή:

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R} \mid a \prec x \prec b\},$$

όπου τα $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, το $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$ και το σύμβολο $\prec$ μπορεί να είναι είτε το $<$ είτε το $\leq$, χωρίς να χρειάζεται να είναι το ίδιο σε κάθε μία από τις δύο εμφανίσεις του. Σε κάθε περίπτωση, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι αν δύο αριθμοί, x, y, ανήκουν σε ένα διάστημα, τότε και κάθε αριθμός που βρίσκεται *ανάμεσά τους* ανήκει επίσης στο διάστημα[13]. Ισχύει επίσης και το αντίστροφο: κάθε σύνολο A που ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$x, y \in A \text{ και } x < z < y \Rightarrow z \in A,$$

δηλαδή, αν δύο αριθμοί ανήκουν σε αυτό τότε να περιέχεται και κάθε αριθμός ανάμεσά τους, είναι διάστημα[14]. Πίσω στην απόδειξη της πρότασης, ας δούμε ποιο είναι το σύνολο $f(\Delta)$:

$$f(\Delta) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{υπάρχει } x \in \Delta \text{ με } f(x) = y\}.$$

Δηλαδή, το $f(\Delta)$ αποτελείται από όλους εκείνους τους αριθμούς y οι οποίοι μπορούν να γραφτούν στη μορφή $y = f(x)$ για κάποιο x στο διάστημα Δ. Για να δείξουμε ότι το $f(\Delta)$ είναι διάστημα,

[13] Για να το αποδείξουμε αυτό, ας σκεφτούμε ως εξής. Αν x, y είναι δύο αριθμοί με $x < y$ και z είναι ένας αριθμός ανάμεσά τους, τότε αυτός ικανοποιεί την ανισότητα

$$x < z < y.$$

Για να δείξουμε ότι ανήκει στο διάστημα Δ, πρέπει να δείξουμε ότι το z ικανοποιεί την ανισότητα:

$$a \prec z \prec b,$$

όπου a, b είναι τα άκρα του Δ. Αφού τα $x, y \in \Delta$, θα ικανοποιούν και αυτά τις ανάλογες ανισότητες:

$$a \prec x \prec b \text{ και } a \prec y \prec b,$$

οπότε, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$a \prec x < z < y \prec b,$$

δηλαδή $z \in \Delta$.

[14] Εδώ η απόδειξη είναι πιο δύσκολη, γι' αυτό θα την παρακάμψουμε.

αρκεί να δείξουμε ότι, για οποιουσδήποτε δύο αριθμούς που περιέχονται στο $f(\Delta)$ ισχύει ότι και κάθε αριθμός ανάμεσά τους περιέχεται σε αυτό. Έστω, λοιπόν, $y_1, y_2 \in f(\Delta)$, με $y_1 < y_2$. Τότε, υπάρχουν δύο αριθμοί $x_1, x_2 \in \Delta$ τέτοιοι ώστε:

$$y_1 = f(x_1) \text{ και } y_2 = f(x_2).$$

Έστω τώρα y ένας αριθμός ανάμεσα στα y_1, y_2, δηλαδή, έχουμε:

$$f(x_1) = y_1 < y < y_2 = f(x_2).$$

Για να δείξουμε ότι $y \in f(\Delta)$ πρέπει(και αρκεί) να βρούμε έναν αριθμό $x \in \Delta$ έτσι ώστε:

$$y = f(x).$$

Από το Θ.Ε.Τ., υπάρχει ένας αριθμός $x \in (x_1, x_2) \subseteq \Delta$ τέτοιος ώστε,

$$f(x) = y,$$

που ήταν το ζητούμενο. Επομένως, το $f(\Delta)$ είναι διάστημα.

□

Με τη χρήση της παραπάνω πρότασης, μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών μίας συνεχούς συνάρτησης, ορισμένης σε ένα *κλειστό* διάστημα στο οποίο αυτή είναι μονότονη. Πράγματι, έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση που είναι γνησίως μονότονη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτή είναι γνησίως αύξουσα, οπότε θα έχουμε το εξής:

$$a \le x \le b \Rightarrow f(a) \le f(x) \le f(b),$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Επομένως, έπεται ότι:

$$f([a, b]) \subseteq [f(a), f(b)].$$

Επίσης, από την παραπάνω πρόταση, αφού το $f([a, b])$ είναι διάστημα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b]),$$

επομένως ισχύει ότι:

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

Ανάλογα, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(b), f(a)]$[15].

Παράδειγμα 3.4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & -2 \le x \le 0 \\ x^2 + 2 & 0 < x \le 3 \end{cases}.$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $[-2, 3]$. Στο $[-2, 0)$ και στο $(0, 3]$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Στο 0, παρατηρούμε ότι:

[15] Επίσης, αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη, αλλά ορισμένη σε *ανοικτό* διάστημα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι, στην περίπτωση που αυτή είναι γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών $f((a, b))$ είναι το ανοικτό διάστημα:

$$\left(\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)\right),$$

ενώ, αν είναι γνησίως φθίνουσα, αυτό είναι το:

$$\left(\lim_{x\to b^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)\right).$$

Ας σημειώσουμε, όμως, ότι η απόδειξη αυτών των δύο αποτελεσμάτων απαιτεί υψηλότερου επιπέδου εργαλεία.

- $f(0) = 2 - 0 = 2$,
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2 - x) = 2 - 0 = 2$ και,
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 2) = 0 + 2 = 2$,

οπότε το όριο $\lim_{x \to 0} f(x)$ υπάρχει και μάλιστα:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 = f(0),$$

άρα η f είναι συνεχής και στο 0, επομένως, είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, $[-2, 3]$.

Επίσης, παρατηρούμε τα εξής:

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0]$, αφού, αν $x_1, x_2 \in [-2, 0]$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$
Επομένως, έχουμε ότι:
$$f([-2, 0]) = [f(0), f(-2)] = [2, 4].$$
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$, αφού, αν $x_1, x_2 \in [0, 3]$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 + 2 < x_2^2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
Επομένως, έχουμε ότι:
$$f([0, 3]) = [f(0), f(3)] = [2, 11].$$

Τελικά, σύνολο τιμών της f είναι το:

$$f([-2, 3]) = f([-2, 0]) \cup f([0, 3]) = [2, 4] \cup [2, 11] = [2, 11].$$

□

3.2.4 Το Θεώρημα Μέγιστης—Ελάχιστης Τιμής (Θ.Μ.Ε.Τ.)

Ένα ακόμα σημαντικό θεώρημα που αφορά συνεχείς συναρτήσεις είναι το Θεώρημα Μέγιστης—Ελάχιστης Τιμής (Θ.Μ.Ε.Τ.). Η ιδέα πίσω από το θεώρημα είναι ότι, αν πάρουμε μία συνεχή συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα, τότε δε γίνεται αυτή να «ξεφύγει ανεξέλεγκτα ούτε προς τα πάνω ούτε προς τα κάτω. Με άλλα λόγια, μία τέτοια συνάρτηση πρέπει να είναι φραγμένη. Όμως το θεώρημα μας δίνει κάτι ισχυρότερο: μας λέει ότι η f έχει ένα ολικό μέγιστο κι ένα ολικό ελάχιστο μέσα σε αυτό το διάστημα. Ας δούμε τώρα και το θεώρημα, άνευ απόδειξης[16]:

Θεώρημα 3.3: Μέγιστης—Ελάχιστης Τιμής

Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ τέτοια ώστε:

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M,$$

για κάθε $x \in [a, b]$.

Μία κλασσική εφαρμογή του Θ.Μ.Ε.Τ. φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

[16] Η απόδειξή του στηρίζεται σε πολύ λεπτά θεωρητικά εργαλεία που όχι μόνο δεν έχουμε, αλλά θα μας ήταν και δύσκολο να τα χειριστούμε, στην προκειμένη.

Παράδειγμα 3.5. Αν $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, να δείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $x_0 \in (0,3)$ τέτοιος ώστε:

$$f(x_0) = \frac{f(0) + 2f(1) + f(2) + 3f(3)}{7}.$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι, πρακτικά, αυτό που μας ζητείται, είναι να δείξουμε ότι η f παίρνει την τιμής ενός σταθμικού μέσου όρου κάποιον τιμών της, πράγμα που φαντάζει λογικό διαισθητικά, αφού οποιοσδήποτε μέσος όρος βρίσκεται ανάμεσα στην μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, επομένως, από το Θ.Ε.Τ. θα πρέπει να πάρουμε το ζητούμενο. Ας δούμε όμως πώς θα το αποδείξουμε αυτό τυπικά.

Αρχικά, αφού η f είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα και συνεχής σε αυτό, από το Θ.Μ.Ε.Τ., υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0,3]$ έτσι ώστε:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),$$

για κάθε $x \in [0,3]$. Θέτουμε $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, οπότε, παίρνοντας διαδοχικά για x το 0, το 1, το 2 και το 3 παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
&m \leq f(0) \leq M \\
&m \leq f(1) \leq M \Leftrightarrow 2m \leq 2f(1) \leq 2M \\
&m \leq f(2) \leq M \\
&m \leq f(3) \leq M \Leftrightarrow 3m \leq 3f(1) \leq 3M.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη αυτές τις σχέσεις και διαιρώντας με το 7 παίρνουμε ότι:

$$m \leq \frac{f(0) + 2f(1) + f(2) + 3f(3)}{7} \leq M,$$

δηλαδή:

$$f(x_1) \leq \frac{f(0) + 2f(1) + f(2) + 3f(3)}{7} \leq f(x_2),$$

οπότε, από το Θ.Ε.Τ. έπεται ότι υπάρχει x_0 μεταξύ των x_1, x_2, επομένως $x_0 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{f(0) + 2f(1) + f(2) + 3f(3)}{7},$$

που ήταν το ζητούμενο.

$\square$

3.3 Ασκήσεις

3.3.1 Ερωτήσεις Σωστού ή Λάθους

Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες** αιτιολογώντας την απάντησή σας (απόδειξη ή αντιπαράδειγμα).

1. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (a, b)$.
2. Μία συνεχής συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ έχει πάντα όριο στο x_0 έναν αριθμό για κάθε $x_0 \in [a, b]$.
3. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν είναι συνεχής στο 0.
4. Η γραφική παράσταση μίας συνεχούς συνάρτησης μπορεί να σχεδιαστεί χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.
5. Δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
6. Η εξίσωση $\ln x = 2 - x^2$ δεν έχει λύση στο $(1, 2)$.
7. Αν $f : [-\pi, 5] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, τότε:
$$\lim_{x\to 0} f(x)\,\text{ημ}\, x = 0.$$
8. Μία συνεχής συνάρτηση που παίρνει τις τιμές 1 και 4 παίρνει κατ' ανάγκη και την τιμή 3.
9. Κάθε άρτια συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano σε ένα διάστημα $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες.
10. Αν δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχουν η κάθε μία ακριβώς μία ρίζα τότε και το άθροισμά τους $f + g$ έχει ακριβώς μία ρίζα.
11. Αν δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχουν η κάθε μία ακριβώς μία ρίζα τότε και το γινόμενό τους $f \cdot g$ έχει ακριβώς μία ρίζα.
12. Αν δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε και η σύνθεσή του $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0.
13. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση τότε το:
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0,$$
για κάθε $x_0 \in A$.
14. Δεν υπάρχει συνάρτηση που να ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Bolzano και να έχει ακριβώς δύο ρίζες.

3.3.2 Α' Ομάδα

1. Να εξετάσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την συνέχεια στο εν λόγω σημείο x_0:

(α′) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^3-1} & x > 1 \\ \dfrac{\text{ημ}(2x-2)}{3x-3} & x < 1 \\ \dfrac{2}{3} & x = 1 \end{cases}$ στο $x_0 = 1$,

(β′) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ \dfrac{x^2-x}{x^2+x} & x < 0 \\ \dfrac{1}{4} & x = 0 \end{cases}$ στο $x_0 = 0$,

(γ′) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & x > 1 \\ 2x^2 - x & x \le 1 \end{cases}$ στο $x_0 = 1$,

(δ′) $s(x) = \begin{cases} x\,\text{ημ}\,\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ στο $x_0 = 0$.

2. Να εξετάσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη συνέχεια σε όλο το πεδίο ορισμού τους:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - \text{ημ}\, x & x \le 0 \\ x + \ln(x+1) & x > 0 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x+1} & x<-1\\ \dfrac{\text{ημ}(\pi x+\pi)}{\pi x} & x>-1\\ -1 & x=-1\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+x}{x\,\text{ημ}\,x} & x<0\\ \dfrac{x^2+2x-3}{x+1} & x\geq 1\end{cases}$$

$$a(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$$

$$b(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^3+x} & x<0\\ \sqrt{x} & x\geq 0\end{cases}$$

$$c(x)=\begin{cases}x^2\,\text{ημ}\,\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{\text{ημ}(4x-\pi)}{4x-\pi} & x<\dfrac{\pi}{4}\\ x/\pi & x>\dfrac{\pi}{4}\\ 1/4 & x=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$k(x)=\begin{cases}\dfrac{x\,\text{ημ}\,x}{\ln x} & x>0\\ \sqrt{x-x^2} & x\leq 0\end{cases}$$

$$\ell(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-2}{\sqrt{x}-1} & x>1\\ x^2-2x & x\leq 1\end{cases}.$$

3. Ομοίως και για τις παρακάτω:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x^2+2x-8} & x<2\\ \dfrac{x^2+164}{2x+2012} & x\geq 2\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-3}-x+3}{x^2-5x+4} & 3<x<4\\ \dfrac{x}{x^2+8} & x\geq 4\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\text{εφ}\,x}{x} & -\dfrac{\pi}{2}<x<0\\ \ln(2e^{x^2+x}-1) & x\geq 0\end{cases}$$

$$a(x)=\begin{cases}\dfrac{\text{ημ}(-x)}{x} & x<0\\ \dfrac{\sqrt{1-x^2}-x-1}{x} & 0<x<1\\ -1 & x=0\end{cases}$$

$$b(x)=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{\text{ημ}(x-x^2)}{x-x^2}\right) & x\in(0,\frac{1}{2})\\ e^{\frac{x^2+1}{x}} & x<0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$c(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}+x-1}{x^3+x} & -1<x<0\\ \dfrac{\text{ημ}(\frac{2x}{3})}{x} & x>0\\ \dfrac{2}{3} & x=0\end{cases}$$

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\text{συν}^2\,x}{x} & x<0\\ \sqrt{\dfrac{e^x+1}{e^x-1}} & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

4. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μία λύση στο υποδεικνυόμενο διάστημα. Σε ποιες περιπτώσεις μπορείτε να εξετάσετε αν η λύση είναι μοναδική;

$$x^5+x^3+x+1=0,\ x\in(-1,0)$$
$$2\,\text{συν}\,x=x,\ x\in(0,2\pi)$$
$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}=0,\ x\in(1,2)$$
$$xe^x=6x,\ x\in(0,2)$$
$$x+\ln x=0,\ x\in(0,1)$$
$$x^3+2019x-\pi=0,\ x\in\mathbb{R}$$
$$x^e=1,\ x\in(0,2)$$
$$e^{2x}-x^2=2,\ x\in(0,1)$$
$$\text{ημ}\,x-\text{συν}\,x=0,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$$
$$\ln x=e^x-2,\ x\in(1,e)$$
$$x^5+3x^2=1 \text{ στο } (0,1)$$
$$\text{συν}\,x=x \text{ στο } (0,\pi/2)$$
$$\text{ημ}\,x+x=\pi \text{ στο } (0,\pi)$$
$$\ln x=2-x \text{ στο } (1,2)$$
$$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{\ln x}=0 \text{ στο } (1,2)$$
$$\text{εφ}\,x=x \text{ στο } (-\pi/2,\pi/2).$$

5. Να βρείτε σε κάθε περίπτωση τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς σε όλο το πεδίο ορισμού τους:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 - x^2 + x - a}{x-1} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a + \eta\mu\, x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma\upsilon\nu(ax) - 1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$s(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^4 + x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

$$t(x) = \begin{cases} 2x^a + \ln x & x \geq 1 \\ \dfrac{x^2 - 2a + 3}{x^2 - 3x + 2} & x < 1 \end{cases}$$

3.3.3 Β' Ομάδα

1. Να βρείτε τις τιμές των $a, b, c \in \mathbb{R}$, αν υπάρχουν, έτσι ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 + bx + c}{4x + 4} & x < -1 \\ \dfrac{\eta\mu(x+1)}{cx + c} & x > -1 \\ 1 & x = -1 \end{cases}.$$

2. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δύο τουλάχιστον λύσεις στο υποδεικνυόμενο διάστημα:

$$\ln(x^2 + 1) = \sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi x}{2},\ x \in (-1, 1)$$
$$e^{x^4} = x^2 + \left|\eta\mu\,\frac{\pi x}{2}\right| + 1,\ x \in (-1, 1).$$

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^a\, \eta\mu\, \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

για κάποιο $a > 0$.

(α') Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ για κάθε $a > 0$.

(β') Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τη συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

στο $x_0 = 0$.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής στο $x_0 = 0$ και έστω $p(x)$ ένα πολυώνυμο. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

$$(p \circ f)(x),\ x \in \mathbb{R},$$

είναι συνεχής στο x_0. Ισχύει το παραπάνω αν αντικαταστήσουμε το πολυώνυμο $p(x)$ με οποιαδήποτε συνάρτηση $g(x)$ με $g(0) = 0$; Αιτολογήστε κατάλληλα την απάντησή σας!

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$ax^2 = bx,$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[a, b]$, αν τα a, b ικανοποιούν τη σχέση:

$$a^3 + b \leq a^2 + a^2 b.$$

6. Να δείξετε ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

7. Να δείξετε ότι, αν $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(a)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (0, a)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{a}{2}\right).$$

Μπορείτε να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το παραπάνω αποτέλεσμα;

8. Να δείξετε ότι η παρακάτω εξισώση έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο $(0, 2\pi)$:

$$\eta\mu\, x = 1 - \frac{x}{\pi}.$$

9. Να εξηγήσετε γιατί ο παρακάτω συλλογισμός του Ιακώβου είναι λανθασμένος:

«Ας πάρουμε μία συνεχή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $f(a) > 0$ και $f(b) < 0$. Τότε, από το θεώρημα του Bolzano, γνωρίζουμε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a, b). Θα σας εξηγήσω γιατί δεν γίνεται να έχει άρτιο πλήθος ριζών (2,4,6,...). Ας πούμε ότι η f, από αριστερά προς τα δεξιά, συναντά πρώτη φορά τον άξονα $x'x$ στο x_1. Αφού $f(a) > 0$, η f, αφού φτάσει στο x_0, θα κατέβει λίγο. Αν έχει και δεύτερη ρίζα, ας πούμε την $x_2 > x_1$, τότε θα πρέπει να ξανα-ανέβει προς τον άξονα $x'x$, οπότε, αμέσως μετά το x_2 η γραφική παράσταση της f θα είναι πάνω από τον άξονα $x'x$, άρα, για να φτάσει μέχρι το $f(b) < 0$ θα πρέπει να ξανακατέβει, άρα θά έχουμε τρεις ρίζες. Ανάλογα, ούτε 4 ούτε 6 ούτε, γενικά, άρτιο πλήθος ριζών, μπορούμε να έχουμε.»

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^5 - 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

(α′) Να την μελετήσετε ως προς τη συνέχεια.

(β′) Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

(γ′) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

(δ′) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(ε′) Να μελετήσετε την αντίστροφή της, f^{-1}, ως προς τη συνέχεια.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{e^{a^2 x}}{e^{(2-a)x} + \sqrt{e}},\ a \in \mathbb{R}.$$

(α′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

(β′) Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ είναι η f συνεχής;

(γ′) Να υπολογίσετε, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

(δ′) Για $a = 1$:

i. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

ii. Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

iii. Να βρείτε το πεδίο τιμών της.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - ax + 2a - 3}{\sqrt{x} - 1} & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{bx^3 - 4x^2 + 2x + 1 - b}{x^2 + b} & x > 1 \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

(α′) Να βρείτε τις τιμές των a, b για τις οποίες η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(β′) Για $a = 2$ και $b \neq -1$:

i. Να δείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(0) + f(1)}{2}.$$

iii. Να υπολογίσετε για τις διάφορες τιμές του $b \neq -1$ το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$xf(x)(xf(x) - 2x^2 \,\text{συν}\, x) \le -x^4 \,\text{συν}^2\, x,$$

για κάθε $x \neq 0$.

(α′) Να δείξετε ότι:

$$f(x) = x \,\text{συν}\, x,$$

για $x \neq 0$.

(β′) Να βρείτε το $f(0)$.

(γ′) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή και να τη μελετήσετε ως προς το πρόσημό της στο διάστημα $[0, 4\pi]$.

(δ′) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$6f(\xi) = f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 3f(-1).$$

14. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$(e^x + 1)(1 - (f(x))^2) = e^x, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

και $f(0) = \frac{1}{2}$.

(α΄) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}}.$$

(β΄) Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

(γ΄) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε την αντίστροφή της.

(δ΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση:

$$f(x) = \theta,$$

για τις διάφορες τιμές του $\theta \in \mathbb{R}$.

(ε΄) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ακριβώς μία λύση.

15. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$(f(x))^2 - 2^x = 3^x, \ \forall \ x \in \mathbb{R},$$

με $f(0) = -\sqrt{2}$.

(α΄) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = -\sqrt{2^x + 3^x}.$$

(β΄) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

(γ΄) Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = e^x - 1$$

έχει ακριβώς μία λύση.

(δ΄) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)f(3x)}{f(2x)f(4x)}.$$

16. Δίνεται μια συενχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2(f(x))^2 + e^{2x}(1 - \text{ημ}^2 x) \leq 2xf(x)e^x \,\text{ημ}\, x,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(α΄) Να δείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{e^x \,\text{ημ}\, x}{x}, \ x \neq 0.$$

(β΄) Να βρείτε το $f(0)$.

(γ΄) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(\text{συν}\, x) = 0,$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, \pi)$.

(δ΄) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to \infty} f(x).$$

3.3.4 Γ' Ομάδα

1. Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση

$$f : [0, 2019] \to \mathbb{R},$$

που ικανοποιεί τη σχέση:

$$|f(x)| = \sqrt{x}\sqrt{x^2 + 1},$$

και, επιπλέον, $f(1) = \sqrt{2}$.

(α΄) Να βρείτε τον τύπο της f.

(β΄) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

(γ΄) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(δ΄) Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(\ln x) + x = 2,$$

έχει μοναδική λύση στο $(1, e^{2019})$.

(ε΄) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα $\xi \in (1, e^{2019})$ τέτοιο ώστε:

$$f(\ln x) > 2 - x,$$

για κάθε $x \in (\xi, e^{2019})$.

2. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sqrt{\frac{1-|f(x)|}{|f(x)|}} = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Αν,επιπλέον, γνωρίζετε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0:

(α΄) Να βρείτε τον τύπο της f.

(β΄) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

(γ΄) Να λύσετε, για $x \geq 0$, την ανισότητα:

$$f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \geq 0.$$

(δ΄) Να δείξετε ότι για κάθε $x, y > 0$ ισχύει η σχέση:

$$f(x+y) < \frac{1}{xy+1}.$$

3. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέμε ότι έχει *σταθερό σημείο* αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = x_0.$$

Αν $f(x) = \text{συν}\, x$:

(α΄) να δείξετε ότι η f έχει σταθερό σημείο,

(β΄) να ερμηνεύσετε το παραπάνω αποτέλεσμα γραφικά,

(γ΄) να εξηγήσετε, γραφικά, γιατί αυτό το σταθερό σημείο είναι μοναδικό.

(δ΄) Έχει η $f \circ f$ σταθερό σημείο; Αν ναι, ποιο; Αν όχι, γιατί;

(ε΄) Έχει η $f \circ f \circ f$ σταθερό σημείο; Αν ναι, ποιο; Αν όχι, γιατί;

(ϛ΄) Έχει η $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\nu \text{ φορές}}$ σταθερό σημείο; Αν ναι, ποιο; Αν όχι, γιατί;

(ζ΄) Εκτός από την $f(x) = \text{συν}\, x$, ποιες άλλες συναρτήσεις έχουν τιες ίδιες ιδιότητες; (δηλαδή, όσες φορές και να τις συνθέσουμε με τον εαυτό τους, αυτές να έχουν σταθερό σημείο)

4. Στα παρακάτω θα δούμε διάφορα προβλήματα που λύνονται με «απλή» εφαρμογή του θεωρήματος του Bolzano:

(α΄) Να δείξετε ότι από τις 10 το πρωί μέχρι και τις 11 το πρωί, ο λεπτοδείκτης και ο ωροδείκτης συναντιούνται τουλάχιστον μία φορά.

(β΄) να δείξετε ότι σε ένα διάστημα 12 ωρών, ένα αναλογικό ρολόι του οποίου οι δείκτες έχουν σταματήσει να κινούνται λέει τουλάχιστον μία φορά τη σωστή ώρα.

(γ΄) Να αποδείξετε ότι υπήρχε ακριβώς μία στιγμή στη ζωή σας κατά την οποία είχατε ύψος ίσο με $\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$ μέτρα.

(δ΄) Να αποδείξετε ότι υπήρχε τουλάχιστον μία στιγμή από τη γέννησή σας ως τώρα κατά την οποία η ηλικία σας, μετρημένη σε μήνες ήταν ίση με το βάρος σας, μετρημένο σε κιλά.

(ε΄) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο αντιδιαμετρικά σημεία στον ισημερινό της Γης τα οποία έχουν κάποια στιγμή ακριβώς της ίδια θερμοκρασία.

(ϛ΄) Περπατάτε βιαστικά από την κουζίνα στο γραφείο σας, έχοντας μία κούπα με καυτό τσάι. Καθώς περπατάτε, σας πέφτει λίγο τσάι στο πάτωμα και σχηματίζει έναν λεκέ με περίεργο σχήμα πάνω στα πλακάκια του δαπέδου. Να δείξετε ότι υπάρχει μία ευθεία, παράλληλη στους αρμούς των πλακακίων, η οποία να χωρίζει τον λεκέ σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

(ζ΄) Το ίδιο σκηνικό με πριν. Πάνω στην βιασύνη σας, σας πέφτει λίγο τσάι στο πάτωμα. Αυτή τη φορά, όμως, σχηματίζονται δύο λεκέδες. Να δείξετε ότι, και σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχει μία ευθεία — όχι απαραίτητα παράλληλη στους αρμούς των πλακακίων — η οποία να χωρίζει ταυτόχρονα και τους δύο λεκέδες σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

(η΄) Πάμε τώρα σε ένα πιο δύσκολο πρόβλημα. Πάλι, τρέχοντας να προλάβετε, σας πέφτει λίγο τσάι στο πάτωμα και δημιουργεί έναν λεκέ. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες, κάθετες μεταξύ τους, έτσι ώστε να χωρίζουν τον λεκέ σε τέσσερα ισεμβαδικά χωρία.

5. Έστω $f : [a, b] \to [a, b]$ μία συνεχής συνάρτηση.

   (α') Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε:
   $$f(x_0) = x_0.$$

   (β') Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, αποδείξτε το εξής «παράδοξο»: Παίρνουμε έναν χάρτη που έχει πάνω του χαραγμένους όλες τις κεντρικές οδικές αρτηρίες της Ελλάδας και στεκόμαστε στη μέση της παλαιάς εθνικής οδού Αθηνών-Πατρών. Ανοίγουμε τον χάρτη και τον απλώνουμε πάνω στον δρόμο. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του χάρτη που πέφτει ακριβώς πάνω σε ένα «πραγματικό» σημείο του δρόμου.

6. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to [a, b]$.

   (α') Να δείξετε ότι η f έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ τέτοιο ώστε:
   $$f(x_0) = x_0.$$

   (β') Αν, επιπλέον, γνωρίζετε ότι $f(a) = b$ και $f(b) = a$ και $g : [a, b] \to [a, b]$ μια συνεχής συνάρτηση, να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

   (γ') Αν, εναλλακτικά, γνωρίζετε ότι $f(a) = a$ και $f(b) = b$ και $g : [a, b] \to [a, b]$ μια συνεχής συνάρτηση, να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

   (δ') Ισχύει το παραπάνω αποτέλεσμα αν δεν είναι αυτές οι τιμές της f στα a και b;

   (ε') Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα των προηγούμενων ερωτημάτων.

7. Έχετε την πρόταση «Κάθε τριγωνομετρική συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της». Αν κάποιος σας δώσει μία συνάρτηση που δεν είναι τριγωνομετρική, τότε εσείς μπορείτε να συμπεράνετε:

   (α') ότι δεν είναι συνεχής;

   (β') ότι είναι συνεχής;

   (γ') ότι δεν είναι τριγωνομετρική;

   Εξηγήστε κατάλληλα την απάντησή σας.

8. Δίνεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

   - $f(xy) = f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,
   - $f(0) < f(1)$,
   - η f είναι συνεχής στο 1.

   (α') Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$.

   (β') Να δείξετε ότι, για κάθε $x \neq 0$:
   $$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}.$$

   (γ') Να δείξετε ότι για κάθε $x \neq 0$, ισχύει ότι $f(x) \neq 0$.

   (δ') Να δείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ ισχύει ότι:
   $$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}.$$

   (ε') Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \neq 0$.

   (ϛ') Να δείξετε ότι, για κάθε $x > 0$:
   $$f(x) > 0$$
   .

   (ζ') Να δείξετε ότι η f είναι είτε άρτια είτε περιττή.

   (η') Να δείξετε ότι $f(f(0)) = 0$.

   (ϑ') Να δείξετε ότι η $f \circ f$ είναι άρτια αν η f είναι άρτια και περιττή αν η f είναι περιττή.

9. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x+y) = f(x)f(y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και η f είναι, επίσης, συνεχής στο $x_0 = 0$ με:

$$\lim_{x\to 0} f(x) > 0.$$

(α′) Να δείξετε ότι:

$$f(0) = 1.$$

(β′) Να δείξετε ότι:

$$f(x) \neq 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. *Υπόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο.*

(γ′) Να δείξετε ότι:

$$f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)},$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(δ′) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής σε όλο του $\mathbb{R}$.

(ε′) Να δείξετε ότι:

$$f(x) > 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

10. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$|\,\text{ημ}\,x| \leq f(x) \leq |\,\text{εφ}\,x|.$$

(α′) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του π.

(β′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|\,\text{συν}\,x|f(x)}{x}.$$

(γ′) Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση $g : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{|\,\text{ημ}\,x|} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο 0.

11. Να δείξετε ότι κάθε περιττή συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 \in D_f$ αν και μόνον αν είναι συνεχής στο $-x_0$. Ισχύει το ίδιο για άρτιες συναρτήσεις;

12. Να εξετάσετε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής και να αιτιολογήσετε κατάλληλα:

«Κάθε συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$ έχει ακριβώς μία ρίζα.»

13. Ας πάρουμε τις παρακάτω προτάσεις, Π1 και Π2:

Π1: «Για κάθε $x \in (a, b)$ είτε $f(x) > 0$ είτε $f(x) < 0$.»
Π2: «Είτε για κάθε $x \in (a, b)$ $f(x) > 0$ είτε για κάθε $x \in (a, b)$ $f(x) < 0$.»

Έχουν και οι δύο προτάσεις το ίδιο νόημα; Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας μέσα από παραδείγματα για κάθε πρόταση.

14. Να βρείτε παράδειγμα συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano και:

(α′) να έχει ακριβώς μία ρίζα στο (a, b),

(β′) να έχει ακριβώς δύο ρίζες στο (a, b),

(γ′) να έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο (a, b),

(δ′) να έχει άπειρες ρίζες στο (a, b),

(ε′) (*) να έχει άπειρες ρίζες στο (a, b), χωρίς όμως το σύνολο των ριζών να περιέχει διάστημα (δηλαδή, αν r_1, r_2 είναι δύο ρίζες τότε να υπάρχει r μεταξύ των r_1, r_2 τέτοιο ώστε $f(r) \neq 0$).

Τι έχετε να σχολιάσετε για τα παραπάνω;

15. Να βρείτε παράδειγμα συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano πλην όμως $f(a)f(b) > 0$ και παρ' όλα αυτά να ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος. Τι συμπεραίνετε;

16. Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η f να είναι συνεχής και η αντίστροφή της να **μην** είναι συνεχής; Αν ναι, ποιά; Αν όχι, γιατί;

17. Σε συνέχεια της προηγούμενης άσκησης, αφού βρήκατε μία τέτοια συνάρτηση, μπορείτε να διατυπώσετε κάποιες συνθήκες έτσι ώστε μία συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση f να έχει συνεχή αντίστροφη;

18. Δίνεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:
$$|f(x)| = |x|, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
Αν, επιπλέον, γνωρίζετε ότι η f είναι συνεχής:
    (α΄) να δείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, την οποία και να προσδιορίσετε,
    (β΄) να βρείτε ποιοι είναι οι πιθανοί τύποι της f.

19. Είδαμε ότι μία γνησίως μονότονη συνάρτηση f είναι και 1-1, αλλά το αντίστροφο, εν γένει, δεν ισχύει. Παρ΄ όλα αυτά ισχύει το ακόλουθο:

    «Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής και 1-1 συνάρτηση, τότε η f είναι γνησίως μονότονη.»

    Μπορείτε να αποδείξετε διαισθητικά — δηλαδή, με ένα σχήμα και κάποια παραδείγματα, ίσως και κάποια πιο μαθηματικά επιχειρήματα, αλλά όχι τελείως αυστηρά — το παραπάνω αποτέλεσμα;

20. Μπορείτε να βρείτε δύο συναρτήσεις:
$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
τέτοιες ώστε:
$$f(x)g(x) = 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$
και, επιπλέον:
    (α΄) να είναι και οι δύο συνεχείς;
    (β΄) να είναι και οι δύο συνεχείς και καμμία από τις δύο να μην είναι η μηδενική συνάρτηση;
    (γ΄) να είναι και οι δύο συνεχείς και μία από τις δύο να είναι και 1-1;
    (δ΄) να είναι κάποια από τις δύο συνεχής και μία από τις δύο να είναι και 1-1;
    (ε΄) να είναι και οι δύο συνεχείς και, επίσης, και οι δύο να είναι και 1-1;

    Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε κατάλληλα (απόδειξη ή αντιπαράδειγμα) την απάντησή σας. Αν αγνοήσουμε την υπόθεση της συνέχειας, ποεις από τις παραπάνω απαντήσεις αλλάζουν και γιατί; Αιτιολογήστε κατάλληλα.

21. Δίνεται μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση:
$$f(x + y) = f(x)f(y),$$
για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και η f είναι, επίσης, συνεχής στο $x_0 = 0$ με:
$$\lim_{x\to 0} f(x) > 0.$$
    (α΄) Να δείξετε ότι:
$$f(0) = 1.$$
    (β΄) Να δείξετε ότι:
$$f(x) \neq 0,$$
    για κάθε $x \in \mathbb{R}$. *Υπόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο.*
    (γ΄) Να δείξετε ότι:
$$f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)},$$
    για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
    (δ΄) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής σε όλο του $\mathbb{R}$.
    (ε΄) Να δείξετε ότι:
$$f(x) > 0,$$
    για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

22. Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to [0, 1]$ με $f(0) = 1$ και $f(1) = 0$.
    (α΄) Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι ακριβώς το $[0, 1]$.
    (β΄) Να δείξετε ότι η εξίσωση
$$f(x) = x$$
    έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0, 1)$.

(γ′) Αν, επιπλέον και για όλα τα επόμενα ερωτήματα, γνωρίζετε ότι η f ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(f(x)) = 1 - x\left((f(x))^3 + f(x) + 1\right),$$

για κάθε $x \in [0,1]$, τότε να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

(δ′) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$. *Υπόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο.*

(ε′) Να δείξετε ότι η λύση της εξίσωσης $f(x) = x$ που δείξατε ότι υπάρχει είναι μοναδική.

(ϛ′) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x) > x,$$

για κάθε $x \in [0,\xi)$.

(ζ′) Να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$e^{f(x)} + xe^x > e^x f(x) + 1,$$

για κάθε $x \in [0,\xi)$. *Υπόδειξη: Θυμηθείτε ότι:*

$$e^x \geq x + 1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

23. Δίνονται δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

- $0 < g(x) < 2019$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- $f(-x) = 1 - f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x).$$

(β′) Να δείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα, $x_0 \in \mathbb{R}$.

(γ′) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι συνεχής στο x_0.

(δ′) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = f(x - x_0)\left((g(x))^2 - 3g(x)\right),$$

είναι συνεχής στο x_0.

(ε′) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{g(x)} + (g(x))^3 + \etaμ\, x}{f(x)}.$$

(ϛ′) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x > \xi$ να ισχύει:

$$f(x)g(x) > 0.$$

24. Ας δούμε λίγο πριν κλείσουμε τις διαφορές μεταξύ συνεκτικότητας και συνέχειας:

(α′) Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση που να είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της και να έχει συνεκτική γραφική παράσταση; Εξηγήστε κατάλληλα.

(β′) Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση που να είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, αλλά να μην έχει συνεκτική γραφική παράσταση; Εξηγήστε κατάλληλα.

(γ′) Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση που να μην είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, αλλά να έχει συνεκτική γραφική παράσταση; Εξηγήστε κατάλληλα.

(δ′) Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση που να είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, να είναι και αντιστρεψιμη και η αντίστροφή της να είναι συνεχής; Εξηγήστε κατάλληλα.

(ε′) Μπορείτε να βρείτε μία συνάρτηση που να είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, να είναι και αντιστρεψιμη, αλλά η αντίστροφή της να μην είναι συνεχής; Εξηγήστε κατάλληλα.

25. Από τα προβλήματα που παρουσιάσαμε στην πρώτη ενότητα του πρώτου κεφαλαίου, ποια μπορείτε πια να λύσετε και σε ποια μπορείτε να προχωρήσετε λίγο περισσότερο από ό,τι στην αρχή;

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων